This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 3009.00.9

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

GEORGE HAYWARD, M.D.,

OF BOSTON,

(Class of 1809).

Ueber den

Begriff und die Anwendung

des Doppellimes.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

in der

Hohen philosophischen Fakultät der Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen

vorgelegt von

Edgar Jerome Townsend

aus Champaign, Amerika.

Göttingen 1900.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei

(W. Fr. Kaestner).

math 3009.00.9

JUL 23 1921

Harvard Law

Referent: Herr Professor Dr. David Hilbert.

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Juli 1900.

Vorwort.

Diese Arbeit ist eine Untersuchung, durch welche der Begriff und die Eigenschaften des Doppellimes systematisch auseinandergesetzt werden und gleichzeitig die Anwendungen desselben auf eine Function von zwei reellen Veränderlichen, und auf eine unendliche Reihe, wo die einzelnen Glieder Functionen von einer Veränderlichen sind, gemacht werden. Um dies am vorteilhaftesten auszuführen, habe ich die ganze Arbeit in drei Teile geteilt. In dem ersten Abschnitt betrachte ich den allgemeinen Begriff des Doppellimes mit den Eigenschaften desselben, wenn nur ein Punkt als Grenzpunkt in Betracht kommt. In dem zweiten Abschnitt erweitere ich diese Betrachtung, indem ich statt eines einzelnen Grenzpunktes alle diejenigen Punkte in Betracht ziehe, für welche die Function $f(x, y)$ überhaupt definiert ist, wo $f(x, y)$ eine in Bezug auf jede Veränderliche allein stetige Function ist. Hier betrachten wir zuerst diejenigen Punkte, welche innerhalb des gegebenen Gebiets liegen, und nachher den Zusammenhang des Doppellimes mit der Stetigkeit dieser Function auf der Grenze dieses Gebiets, wo die Grenzfunction auf der Grenze $y = y_0$ durch den Limes

$$f(x, y_0) = \underset{y=y_0}{L} f(x, y_0)$$

für jedes x definiert ist. In dem dritten Kapitel habe ich die unendliche Reihe als einen besonderen Fall der allgemeineren, im zweiten Kapitel betrachteten Function $f(x, y)$

angesehen, und dadurch verschiedene Sätze über die Stetigkeit der Grenzfunction einer unendlichen Reihe abgeleitet.

Für die Angabe des allgemeinen Gedankengangs dieser Arbeit sowohl, wie für seine Beratung und Leitung während ihrer Abfassung habe ich Herrn Professor Hilbert zu danken.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Begriff des Doppellimes.

Seite

§ 1. Definition des Doppellimes 1

§ 2. Eigenschaften des Doppellimes 2

§ 3. Definitionen von

a) regulärer Convergenz, regulärer Stelle 11

b) irregulärer Stelle 12

c) Nachbarpunkten 12

d) einem Sprung in Bezug auf (x, y) 12

§ 4. Kriterium für die Existenz

a) eines einfachen Limes 13

b) eines Doppellimes 17

Zweites Kapitel.

Eigenschaften von Functionen zweier Veränderlichen, die in Bezug auf jede stetig sind.

§ 5. Einleitung zum zweiten Kapitel 17

§ 6. In jedem Punkt des Gebiets sind die Limes vertauschbar . 18

§ 7. Bei jeder nicht gleichzeitigen Annäherung von x und y an eine Stelle durch eine beliebige, überall dichte Menge von Punkten giebt es denselben Grenzwert 19

§ 8. Die Function $f(x, y)$ kann eine überall dichte Menge von irregulären Stellen besitzen 20

Seite

§ 9. Die Verdichtungsstelle von Punkten, wo der (xy)-Sprung grösser als a ist, ist auch eine Stelle, wo der (xy)-Sprung grösser als a ist 23

§ 10. Die Stellen, mit einem (xy)-Sprung grösser als a, sind nirgends überall dicht 24

§ 11. Die regulären Stellen bilden wenigstens eine überall dichte Menge 27

§ 12. Begriff der gleichmässigen Convergenz gegen eine Grenzfunction 28

§ 13. Notwendige und hinreichende Bedingung für gleichmässige Convergenz 30

§ 14. Zweite Bedingung für gleichmässige Convergenz 34

§ 15. Wenn $f(x, y)$ gegen $f(x, y_0)$ gleichmässig convergiert, dann ist $f(x, y_0)$ eine stetige Function von x 36

§ 16. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Grenzfunction $f(x, y_0)$ eine stetige Function ist . . . 37

§ 17. Die Grenzfunction kann auch unstetig werden:
a) an unendlich vielen Stellen 41
b) an einer überall dichten Menge von Stellen . . . 42

§ 18. Die Grenzfunction kann nicht an jeder Stelle unstetig werden 44

§ 19. Die Grenzfunction besitzt wenigstens eine überall dichte Menge von regulären Stellen 52

§ 20. Die Grenzfunction kann auch eine überall dichte Menge von irregulären Stellen besitzen 55

Drittes Kapitel.

Anwendung auf unendliche Reihen.

§ 21. Beziehung zwischen der im vorhergehenden Kapitel betrachteten Function $f(x, y)$ und einer unendlichen Reihe 56

§ 22. Gleichmässige Convergenz einer unendlichen Reihe . . . 57

§ 23. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Reihe gegen eine stetige Function convergiert . . . 64

§ 24. Wenn $s_n(x)$ stetig ist, muss die Reihe an wenigstens einer überall dichten Menge von Stellen regulär convergieren 68

§ 25. Wenn $s_n(x)$ stetig ist, kann die Grenzfunction $f(x)$ doch an einer überall dichten Menge von Punkten irreguläre Stellen besitzen 68

§ 26. Wenn $s_n(x)$ stetig ist, und für jedes x gegen $f(x)$ convergiert, kann $f(x)$ unstetig werden:

Seite

a) an unendlich vielen Stellen 70

b) an einer überall dichten Menge von Stellen . . . 71

§ 27. Wenn $s_n(x)$ stetig ist, und für jedet x gegen $f(x)$ convergiert, kann $f(x)$ nicht an jeder Stelle unstetig wereen 72

§ 28. Wenn $s_n(x)$ stetig ist, ist es möglich, dass $s_n(x)$ an nur einer Stelle convergiert und hier auch regulär convergiert 72

§ 29. Wenn $s_n(x)$ nicht stetig ist, und doch convergiert für alle Werte von x, kann die Reihe an einer einzelnen Stelle gegen $f(x)$ regulär convergieren 74

Erstes Kapitel.

Begriff des Doppellimes.

§ 1. Wir haben hier mit einer Funktion von zwei reellen Veränderlichen zu thun. Eine solche Funktion $z = f(x,y)$ ist vollständig definiert, wenn zu jedem Wertepaar (x, y), welches in Betracht kommt, immer ein bestimmter Wert von z gehört. In dieser Untersuchung wollen wir auch durchweg annehmen, dass $f(x,y)$ eindeutig ist, d. h., dass zu jedem Wertepaar (x, y) nur ein Wert von z gehört. Wir haben mit zwei verschiedenen Arten von Veränderungen der Funktion zu thun, nämlich: Wir können entweder die eine Veränderliche als constant betrachten und lassen die andere allein sich ändern, oder wir können alle beide gleichzeitig sich ändern lassen. Dies verursacht die Existenz von zwei verschiedenen Arten von Limes. Wenn eine Veränderliche, etwa y, als constant betrachtet wird, und wenn a eine Häufungszahl von x ist, dann sagt man, dass der einfache Limes

$$\lim_{x=a} f(x,b)$$

existiert und gleich A ist, wenn zu jeder beliebig kleinen positiven vorgegebenen Zahl σ immer eine andere positive Zahl δ bestimmt werden kann, welche der Ungleichung

$$|f(a+\delta,b)-A|<\sigma \tag{1}$$

genügt, und wenn dies auch gilt, wenn wir σ noch kleiner

nehmen. Die Existenz des Limes bedeutet geometrisch, dass in der (zx)-Ebene um den bestimmten Punkt A ein Rechteck von der Breite 2σ und von der Länge 2δ existiert, so dass, wenn x sich der Stelle $x = a$ nähert, die Funktionswerte für jedes x zwischen $a-\delta$ und $a+\delta$ innerhalb des Rechtecks $A \pm \sigma$, $A \pm \delta$ liegen, wo σ noch so klein genommen werden kann.

In einer ähnlichen Weise definieren wir den Doppellimes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$, wo wir die beiden Veränderlichen gleichzeitig sich ändern lassen und wo a und b Häufungszahlen von x resp. y sind. Wir sagen, dass dieser Limes existiert und gleich A ist, wenn zu einer vorgegebenen beliebig kleinen positiven Zahl σ eine andere positive Zahl δ bestimmt werden kann, sodass die Ungleichung

$$|f(a+\delta_1, b+\delta_2) - A| < \sigma \tag{2}$$

für jedes Wertepaar (δ_1, δ_2) erfüllt ist, wo δ_1, δ_2 unabhängig von einander sind und auch extra der Bedingung

$$|\delta_1| \leqq \delta, \qquad |\delta_2| \leqq \delta$$

genügen. Der Doppellimes lässt sich auch leicht geometrisch interpretieren. Da zu jedem vorgegebenen σ ein δ_1 und ein δ_2 gehört, so können wir um den bestimmten Punkt A ein Parallelepipedon von der Höhe 2σ und von der Länge und Breite $2\delta_1$ resp. $2\delta_2$ gezeichnet denken. Wenn nun x und y sich gleichzeitig der Stelle (ab) nähern, so müssen die Functionswerte für jedes Wertepaar (x, y), welches innerhalb des Gebietes

$$a-\delta_1 \leqq x \leqq a+\delta_1; \qquad b-\delta_2 \leqq y \leqq b+\delta_2$$

liegt, innerhalb des Parallelepipedons fallen und auch noch, wenn wir σ kleiner nehmen. Oder, mit anderen Worten, wenn wir in der (x, y)-Ebene um den Punkt (ab) ein Rechteck von Länge und Breite gleich $2\delta_1$ resp. $2\delta_2$ gezeichnet denken, so unterscheidet sich dann von A der irgend einer Stelle entsprechende Funktionswert weniger als die beliebig kleine Zahl σ. Wir können auch den Doppellimes geo-

metrisch interpretieren, indem wir in der (x, y)-Ebene um den Punkt (ab) einen Kreis mit Radius δ gezeichnet denken, innerhalb dessen der jedem Punkt entsprechende Functionswert sich von A weniger als die beliebig kleine positive Grösse σ unterscheidet.

Beispiel 1. Es sei $f(x, y) = y \sin x$. Der Limes $\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x, y)$ muss existieren. Denn hier ist $A = 0$, und für jedes noch so kleine σ können wir immer ein δ finden, sodass wir für

$$|\delta_1| \leqq \delta, \qquad |\delta_2| \leqq \delta$$

haben

$$|\delta_2 \sin \delta_1| < \sigma.$$

Das A, welches wir als den Grenzwert des Doppellimes definiert haben, muss immer eine bestimmte endliche Zahl werden. Sein Wert hängt aber nicht von dem Wert der Function an der Grenzstelle (ab) selbst ab, sondern nur von den Functionswerten, die in der Umgebung der Häufungsstelle sich befinden. Wenn an der Stelle (ab) der Grenzwert A existiert, dann braucht er nicht gleich dem Functionswert $f(a, b)$ zu sein, und in der That braucht die Function an dieser Stelle gar nicht zu existieren, was wir an dem folgenden Beispiel zeigen wollen.

Beispiel 2. Es sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ für alle Punkte mit Ausnahme des Coordinatenanfangspunktes, wo wir sie als gleich eins definieren wollen. Dann haben wir

$$\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x, y) = \underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} \{x^2 + y^2\} = 0 \neq f(0, 0) = 1.$$

Oder, wenn wir unsere Function $f(x, y)$ an der Nullstelle gar nicht definiert denken, haben wir ebenso

$$\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x, y) = \underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} \{x^2 + y^2\} = 0.$$

§ 2. Wir wollen jetzt gewisse Eigenschaften des Doppellimes betrachten. Zunächst behaupten wir:

I. Wenn der Limes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x, y)$ existiert und

gleich A ist, dann müssen wir bei jeder stetigen Annäherung von x und y an die Stelle (a, b) einen und denselben Grenzwert A bekommen, d. h. wenn z. B. wir $y = \Phi(x)$ setzen, wo $\Phi(x)$ an der Stelle $x = a$ eine stetige Function ist, und für $x = a$ den Wert b hat, so müssen wir

$$\underset{x=a}{L} f(x, \Phi(x)) = A$$

haben.

Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so könnten wir nach unserer Definition des Doppellimes ein $\Phi(x)$ so wählen, dass wir für ein hinreichend kleines σ und für jedes noch so kleine δ haben

$$|f(a+\delta, \Phi(a+\delta)) - A| > \sigma. \tag{1}$$

Aber da die Function $\Phi(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig ist und für $x = a$ den Wert b hat, so haben wir

$$\underset{x=a}{L} \Phi(x) = \Phi(a) = b$$

und auch

$$\Phi(a+\delta) = \Phi(a) + \delta_2 = b + \delta_2.$$

Setzen wir diesen Wert von $\Phi(a+\delta)$ in (1) ein, so erhalten wir die Ungleichung

$$|f(a+\delta_1, b+\delta_2) - A| > \sigma,$$

welche für jedes Wertepaar (δ_1, δ_2) in der Umgebung des Punktes (a, b) gilt. Dies sagt aber nichts anderes aus, als dass der Limes $\underset{\substack{x=a \\ y=b}}{L} f(x, y)$ nicht existiert. Aus diesem Widerspruch folgt unsere Behauptung. Ebenso beweisen wir, dass

$$\underset{y=b}{L} (\Psi(y), y) = A$$

ist, wenn

$$\underset{\substack{x=a \\ y=b}}{L} f(x, y) = A$$

und $x = \Psi(y)$ eine an der Stelle $y = b$ stetige Function ist und für $y = b$ den Wert a hat.

Dieser Satz giebt uns manchmal ein sehr anwendbares Mittel, um zu zeigen, dass der Doppellimes nicht existiert. Denn wenn wir unser $\Phi(x)[\Psi(y)]$ auf irgend zwei Weisen so wählen können, dass wir zwei verschiedene Grenzwerte bekommen, dann ist es sicher, dass der Doppellimes nicht existiert

Beispiel 1. Es sei $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, wo $f(0,0)$ ist. Setzen wir $x = \Psi(y) = 2y$, dann haben wir

$$\underset{y=0}{L} \frac{4y^2-y^2}{4y^2+y^2} = \tfrac{3}{5}.$$

Aber setzen wir $x = \Psi(y) = 3y$, so bekommen wir

$$\underset{y=0}{L} \frac{9y^2-y^2}{9y^2+y^2} = \tfrac{4}{5}.$$

Also folgt es, dass der Limes

$$\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x,y)$$

nicht existiert.

II. Wenn der Limes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$ existiert und gleich A ist, dann ist auch

$$\underset{x=a}{L} f(x,b) = \underset{y=b}{L} f(a,y) = A.$$

Dies folgt unmittelbar aus I, wenn wir die eine Veränderliche als eine Constante betrachten, oder mit anderen Worten, wenn wir $\Phi, [\Psi]$, gleich der Constanten $b, [a]$ setzen.

Wir dürfen aber nicht annehmen, dass, wenn die Limes

$$\underset{x=a}{L} f(x, \Phi(x)), \qquad \underset{y=b}{L} f(\Psi(y), y)$$

für einzelne Werte von Φ und Ψ beide existieren und gleich A sind, dann der Limes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$ auch existiert. Wir wollen dies erklären, indem wir die folgenden Beispiele betrachten.

Beispiel 2. Sei $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, wo $f(0,0) = 0$.

Hier haben wir für $\Phi = 0$, $\Psi = 0$

$$\underset{x=0}{L} f(x,0) = \underset{y=0}{L} f(0,y) = 0.$$

Aber der Limes $\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x,y)$ existiert nicht, denn setzen wir $x = my$, so bekommen wir:

$$\underset{x=0}{L} \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{m}{1+m^2},$$

und dieser Ausdruck kann alle Werte zwischen $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ haben, wenn m alle die Werte zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annimmt.

Beispiel 3. Sei $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$, wo $f(0,0) = 0$.

Bei jeder stetigen linearen Annäherung der Function an die Stelle $x = 0$, $y = 0$ bekommen wir immer den Wert Null heraus. Aber trotzdem existiert der Doppellimes $\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x,y)$ nicht. Denn setzen wir $x = my$, so haben wir

$$\underset{y=0}{L} \frac{my^3}{m^2y^2+y^4} = \underset{y=0}{L} \frac{1}{\frac{m}{y}+\frac{y}{m}} = 0$$

für alle Werte von m. Setzen wir ebenso $y = mx$, so erhalten wir

$$\underset{x=0}{L} \frac{m^2x^3}{x^2+m^4x^4} = \underset{x=0}{L} \frac{1}{\frac{1}{m^2x}+\frac{m^2x}{1}} = 0$$

für alle Werte von m. Aber setzen wir $x = y^2$, so bekommen wir

$$\underset{y=0}{L} \frac{y^4}{y^4+y^4} = \tfrac{1}{2}.$$

Also nach I existiert der Limes $\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x,y)$ nicht.

Beispiel 4. Sei $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2+y^6}$ wo $f(0, 0) = 0$.

Dieses ist auch ein Beispiel, wo an der Nullstelle die Function für jedes lineare und auch für jedes quadratische Φ [oder Ψ] denselben Grenzwert Null hat, aber wo der Limes $\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L}$ nicht existiert. Z. B. setzen wir $y = mx$, so haben wir

$$\underset{x=0}{L} \frac{m^3x^4}{x^2+m^6} = \underset{x=0}{L} \frac{1}{\frac{1}{m^3x^2}+\frac{m^3x^3}{1}} = 0$$

für alle Werte von m.

Setzen wir ebenso $x = my$, so bekommen wir

$$\underset{y=0}{L} \frac{my^4}{m^2y^2+y^6} = \underset{y=0}{L} \frac{my^2}{m^2+y^4} = 0$$

für alle Werte von m.

Also giebt es bei jeder linearen Annäherung an die Stelle $x = y = 0$ den Wert Null. Wenn wir setzen $x = ay^2+by$, welches die allgemeinste durch die Nullstelle gehende quadratische Substitution ist, dann erhalten wir für alle Werte von a und b:

$$\underset{y=0}{L} \frac{y^4(ay+b)}{y^2(ay+b)^2+y^6} = \underset{y=0}{L} \frac{y^2(ay+b)}{(ay+b)^2+y^6} = 0.$$

Oder, wenn wir $y = ax^2+bx$ setzen, haben wir

$$\underset{x=0}{L} \frac{x^4(ax+b)^3}{x^2+x^6(ax+b)^6} = \underset{x=0}{L} \frac{x^2(ax+b)^3}{1+x^4(ax+b)^6} = 0,$$

welches für alle Werte von a und b gilt. Also haben wir bei jeder quadratischen Annäherung der Function an der Stelle $x = y = 0$ auch den Wert Null. Wenn wir dagegen $x = y^3$ setzen, haben wir aber

$$\underset{y=0}{L} \frac{y^6}{y^6+y^6} = \tfrac{1}{2}.$$

Daraus folgt nach I, dass der Limes $\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x, y)$ nicht existiert.

Dieses Beispiel lässt sich verallgemeinern, indem wir die Function $f(x,y) = \frac{xy^n}{x^2+y^{2n}}$ betrachten. Hier haben wir bei jeder Annäherung der Nullstelle längs einer stetiger Curve von weniger als n^{tem} Grade immer den Grenzwert Null, aber trotzdem existiert der Doppellimes nicht. Wenn wir aber $x = y^n$ setzen, dann bekommen wir:

$$\underset{y=0}{L} \frac{y^{2n}}{y^{2n}+y^{2n}} = \tfrac{1}{2}.$$

Also der Doppellimes für $x = 0$, $y = 0$ existiert nicht.

Wenn wir alle stetigen Functionen Φ und Ψ in Betracht ziehen, dann haben wir den folgenden Satz:

III. Wenn bei jeder stetigen Annäherung von x und y an die Stelle (a,b) wir denselben Grenzwert A bekommen, dann existiert der Limes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$.

Denn wenn dies nicht der Fall wäre, so würden wir wenigstens einen Wert von Φ [Ψ], etwa $y = \Phi'$, haben, wo der Limes

$$\underset{x=a}{L} f\{x, \Phi'(x)\}$$

entweder nicht existiert, oder einen von A verschiedenen Wert hat. Also dann folgt nach I, dass der Limes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$ nicht existiert.

Wenn wir nun I und III zusammenfassen, so können wir das Resultat wie folgt ausdrücken:

IV. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Limes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$ existiert, ist, dass wir bei jeder stetigen Annäherung von x und y an die Stelle (a,b) denselben bestimmten Grenzwert A bekommen.

Ist $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y) = A$, so ist, wie wir schon gesehen haben, auch gleichzeitig

$$\lim_{x=a} f(x,b) = \lim_{y=b} f(a,y) = \lim_{\substack{x=a\\y=b}} f(x,y) = A.$$

Die Existenz des Limes $\lim\limits_{\substack{x=a\\y=b}} f(x,y)$ verlangt aber nicht, dass die beiden Limes

$$\lim_{x=a} f(x,b\pm\varepsilon), \quad \lim_{y=b} f(a\pm\delta,y)$$

existieren sollen, wo ε, δ beliebig kleine Grössen sind, welches wir beispielsweise zeigen wollen.

Beispiel 5. Es sei $f(x,y) = y\sin\frac{1}{x}$, wo $f(0,0) = 0$.

Dann haben wir

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} f(x,y) = \lim_{x=0}(x,0) = \lim_{y=0}(0,y) = 0,$$

aber der Limes

$$\lim_{x=0} f(x,\varepsilon) = \lim_{x=0} \varepsilon\sin\frac{1}{x}$$

hat keine Bedeutung.

Umgekehrt können die beiden Limes

$$\lim_{x=a} f(x,y), \qquad \lim_{y=b} f(x,y)$$

für jedes y resp. x in der Umgebung des Punktes (a,b) existieren, ohne dass der Limes $\lim\limits_{\substack{x=a\\y=b}} f(x,y)$ existieren soll.

Beispiel 6. Es sei $f(x,y) = \left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$, wo $f(0,0) = 0$.

Dann haben wir

$$\text{für } y \neq 0,\ \lim_{x=0}\left(\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)^{\frac{1}{x^2+y^2}} = 1;$$

$$\text{„ } y = 0,\ \lim_{x=0} \text{ „ } = 0;$$

$$\text{„ } x = 0,\ \lim_{y=0} \text{ „ } = 1;$$

$$\text{„ } x \neq 0,\ \lim_{y=0} \text{ „ } = 0.$$

Also existiert der Limes $\underset{x=0}{L} f(x,y)$ für jedes y, und der Limes $\underset{y=0}{L} f(x,y)$ für jedes x in der Umgebung von dem Nullpunkt. Aber nach I existiert der Limes $\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L} f(x,y)$ nicht, weil wir haben

$$\underset{x=0}{L} f(x,0) \neq \underset{y=0}{L} f(0,y)$$

Wir können aber den folgenden Satz behaupten:

V. Wenn $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$ existiert und gleich A ist, und ausserdem, wenn $\underset{x=a}{L} f(x,y)$ für jedes y und ebenso $\underset{y=b}{L} f(x,y)$ für jedes x in der Umgebung von ab existiert, dann ist

$$\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y) = \underset{x=a}{L}\,\underset{y=b}{L} f(x,y) = \underset{y=b}{L}\,\underset{x=a}{L} f(x,y).$$

Denn es sei $\underset{x=a}{L} f(x,y) = F(a,y)$, dann haben wir

$$|F(a,y)-f(a+\delta,y)| < \sigma \tag{1}$$

für jedes y in der Umgebung von (a,b), und da der Doppellimes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$ existiert und gleich A ist, so haben wir nach der Definition des Doppellimes für jedes δ und jedes y in der Umgebung von (a,b) auch

$$|f(a+\delta,y)-A| < \sigma. \tag{2}$$

Durch Addition von (1) und (2) erhalten wir

$$|F(a,y)-A| < 2\sigma,$$

d. h.

$$\underset{y=b}{L} F(a,y) = A.$$

Daraus folgt, da $F(a,y) = \underset{x=a}{L} f(x,y)$ ist, dass

$$\underset{y=b}{L}\,\underset{x=a}{L} f(x,y) = A.$$

Ebenso beweisen wir, dass

$$\underset{x=a}{L}\ \underset{y=b}{L} f(x,y) = A.$$

Also haben wir

$$\underset{x=a}{L}\ \underset{y=b}{L} f(x,y) = \underset{y=b}{L}\ \underset{x=a}{L} f(x,y) = \underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y),$$

was wir beweisen wollten. Es ist zu bemerken, dass dieser Satz nicht verlangt, dass $F(a,y)$ gleich $f(a,y)$ sein soll. Mit anderen Worten, ausserhalb der Stelle (a,b) selbst braucht $f(x,y)$ an keiner Stelle in Bezug auf jede Veränderliche allein stetig zu sein und also nicht in Bezug auf beide.

§ 3. Bisher haben wir nicht von dem Falle gesprochen, wo der Grenzwert an der Häufungsstelle (a,b) gleich dem Functionswert $f(a,b)$ ist. Fügen wir nun diese Bedingung hinzu, nämlich dass

$$\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y) = f(a,b),$$

dann sagen wir, dass die Function an der Stelle (a,b) regulär convergiert, und nennen die Stelle selbst eine reguläre Stelle. An einer solchen Stelle ist die Function immer stetig in Bezug auf die beiden Veränderlichen, weil die Gleichung

$$\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y) = f(a,b)$$

die Bedingung dafür ist, dass $f(x,y)$ an der Stelle (a,b) stetig in (x,y) zusammen ist. Also könnten wir diese Stelle eine Stetigkeitsstelle in Bezug auf die beiden Veränderlichen nennen. Wir aber wollen lieber den kürzeren Ausdruck reguläre Stelle brauchen. Nach § 2, II ist auch die Function stetig in Bezug auf jede Veränderliche allein. In der That ist $f(x,y)$ dann nach § 2, I bei jeder stetigen Annäherung von x und y an die reguläre Stelle (a,b) eine stetige Function. In Beispiel 2 § 2 haben wir eine solche Function an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ betrachtet.

Wenn der Limes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L} f(x,y)$ nicht existiert, dann nennen

wir die Stelle (a, b) eine irreguläre Stelle. Eine solche Stelle ist dadurch characterisiert, dass wir bei einer stetigen Annäherung an die Stelle (a, b) entweder keinen bestimmten Grenzwert bekommen, oder dass wir wenigstens zwei verschiedene Annäherungen so wählen können, dass wir verschiedene Grenzwerte erreichen. In den Beispielen 1, 2, 3, 4 und 6 des vorigen Paragraphen haben wir Functionen betrachtet, die eine irreguläre Stelle für $x = 0$, $y = 0$ haben, wo wir in jedem Falle $A = f(0, 0) = 0$ definiert haben. An einer solchen Stelle kann die Function $f(x, y)$ in Bezug auf jede Veränderliche allein stetig werden. So sind z. B. die Functionen, die in den Beispielen 2, 3 und 4 des vorigen Paragraphen betrachtet sind, an der irregulären Stelle $x = y = 0$ stetig in Bezug auf x allein und auf y allein. Ist dagegen $f(x, y)$ an irgend einer Stelle in Bezug auf eine Veränderliche unstetig, so hat sie an dieser Stelle eine irreguläre Stelle. In jeder noch so kleinen Umgebung von einer irregulären Stelle giebt es immer Punkte, wo der entsprechende Functionswert sich von A mehr unterscheidet, als eine hinlänglich kleine Zahl σ, d. h., wo

$$|f(x, y) - A| > \sigma$$

ist. Solche Punkte wollen wir Nachbarpunkte nennen.

Man definiert, an der Stelle $x = a$ den Sprung von einer Function einer Veränderlichen $f(x)$ als den Limes der Differenz zwischen der unteren und oberen Grenze der Function innerhalb des Intervalls $(a - \delta, a + \delta)$ für $\delta = 0$. In einer ähnlichen Weise definieren wir den Sprung einer Function von zwei Veränderlichen $f(x, y)$ an der Stelle (a, b). Um dies zu thun, zeichnen wir um den Punkt (a, b) einen Kreis mit dem Radius ρ und nehmen innerhalb dieses Kreises die Differenz der unteren und oberen Grenze der Function. Den Limes dieser Differenz für $\rho = 0$ nennen wir den Sprung der Function in Bezug auf die beiden Veränderlichen (x, y), oder einfach den (x, y)-Sprung. An einer regulären Stelle ist also der Sprung gleich Null, aber an einer irregulären Stelle ist er immer grösser als Null.

Beispiel 1. Es sei $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, wo $f(0,0) = 0$.

Führen wir die Polarcoordinaten ρ und Φ ein, dann sind die obere und untere Grenze der Function durch $\Phi = 45^\circ$ resp. -45° gegeben. Also ist der Sprung an der Nullstelle gleich

$$\lim_{\rho=0} \left\{ \frac{\rho^2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ}{\rho^2 \cos^2 45^\circ + \rho^2 \sin^2 45^\circ} - \frac{-\rho^2 \cos 45^\circ \sin 45^\circ}{\rho^2 \cos^2 45^\circ + \rho^2 \sin^2 45^\circ} \right\}$$
$$= 2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ = \sin 90^\circ = 1.$$

Es ist zu bemerken, dass der Sprung an einer Stelle (ab) immer grösser oder gleich der Differenz zwischen dem Functionswerte $f(a, b)$ und demjenigen Grenzwerte ist, welchen wir bei irgend einer stetigen Annäherung der Stelle bekommen. Wir haben oben gesehen, dass an einer irregulären Stelle der Sprung in Bezug auf beide Veränderliche grösser als Null sein muss. Es ist auch möglich, dass an einer solchen Stelle der Sprung in Bezug auf beide Veränderliche unendlich gross wird, und dass trotzdem unsere Function in der Umgebung des Punktes eine stetige Function von jeder Veränderlichen allein ist.

Beispiel 2. Es sei $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^3}$, wo $f(0, 0) = 0$.

Diese Function ist an der Stelle $x = y = 0$ eine stetige Function in x allein und in y allein, aber nicht in (xy) zusammen. Denn setzen wir $x = y^{3/2}$, se bekommen wir

$$\lim_{y=0} \frac{y^{5/2}}{y^3+y^3} = \lim \frac{1}{2y^{1/2}} = \infty.$$

Daraus folgt auch, dass der Sprung in Bezug auf (x, y) unendlich gross ist.

§ 4. Eine Anwendung des Doppellimes giebt uns ein Kriterium für die Existenz des einfachen Limes $\lim_{x=a} f(x)$. Wir können dieses Kriterium wie folgt aussprechen.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Limes $\lim_{x=a} f(x)$ existiert, ist, dass

$$\underset{\substack{x=a\\ \bar{x}=a}}{L}\{f(x)-f(\bar{x})\} = 0.$$

Beweis. Der Bestimmtheit halber setzen wir voraus, dass x zwischen $\bar{x}$ und a liegt. Dass unser Kriterium eine nothwendige Bedingung der Existenz des Limes $\underset{x=a}{L} f(x)$ ist, zeigen wir wie folgt. Wenn $\underset{x=a}{L} f(x)$ existiert, haben wir

1) $$\underset{x=a}{L} f(x) = A,$$

2) $$\underset{\bar{x}=a}{L} f(\bar{x}) = A.$$

Durch Subtraction erhalten wir also:

$$\underset{x=a}{L} f(x) - \underset{\bar{x}=a}{L} f(\bar{x}) = 0,$$

welches wir als einen Doppellimes schreiben können, weil $f(x)$ und $f(\bar{x})$ die Veränderlichen $\bar{x}$ resp. x nicht enthalten. Also ist

$$\underset{\substack{x=a\\ \bar{x}=a}}{L} f(x) - \underset{\substack{x=a\\ \bar{x}=a}}{L} f(\bar{x}) = 0.$$

Da nach 1) und 2) beide dieser Limes existieren, können wir schreiben [1]):

$$\underset{\substack{x=a\\ \bar{x}=a}}{L}\{f(x)-f(\bar{x})\} = 0.$$

Unser Satz giebt uns auch eine hinreichende Bedingung. Denn setzen wir voraus, dass

3) $$\underset{\substack{x=a\\ \bar{x}=a}}{L}\{f(x)-f(\bar{x})\} = 0,$$

dann können wir zeigen, dass der Limes $\underset{x=a}{L} f(x)$ auch existieren muss. Um dies zu thun, verfahren wir so. Wir

1) Die algebraische Summe von zwei Limes gleich dem Limes von der Summe der Functionen ist, wenn beide Limes existieren.

setzen $F(\bar{x})$ gleich der oberen Grenze von $|f(x)-f(\bar{x})|$, wo wie vorher x zwischen $\bar{x}$ und a liegt. $F(\bar{x})$ ändert sich dann monoton mit $\bar{x}$, aber für ein festes $\bar{x}$ ist es eine Constante. Für jedes $\bar{x}$ verschieden von a, müssen nun die Werte der Function $f(x)$ zwischen $f(\bar{x})-F(\bar{x})$ und $f(\bar{x})+F(\bar{x})$ liegen, wo x alle Werte von $\bar{x}$ bis a annehmen kann (a selbst ausgeschlossen). Setzen wir jetzt der Reihe nach

$$x = \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \cdots\cdots,$$

wo $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3 \cdots\cdots$ ein System von Werten sind, welche a als Häufungszahl haben, dann ist

4) $$f(\bar{x}_1)-F(\bar{x}_1) \leqq f(x) \leqq f(\bar{x}_1)+F(\bar{x}_1).$$

5) $$f(\bar{x}_2)-F(\bar{x}_2) \leqq f(x) \leqq f(\bar{x}_2)+F(\bar{x}_2).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(\bar{x}_n)-F(\bar{x}_n) \leqq f(x) \leqq f(\bar{x}_n)+F(\bar{x}_n).$$

Hier ist $F(\bar{x}_1) \geqq F(\bar{x}_2) \geqq F(\bar{x}_3) \cdots\cdots \geqq F(\bar{x}_n) \cdots$, weil $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3 \cdots$ die Häufungszahl a haben und wegen 3)

$$\lim_{\bar{x}=a} F(\bar{x}) = 0$$

ist, und zwar nimmt die Function $F(\bar{x})$ immer monoton ab. Die eine der Zahlen $f(\bar{x}_2) \pm F(\bar{x}_2)$, welche den Spielraum der Function $f(x)$ in 5) definiert, kann ausserhalb des Intervalls $f(\bar{x}_1) \pm F(\bar{x}_1)$ liegen, wie in der Figur gezeichnet ist.

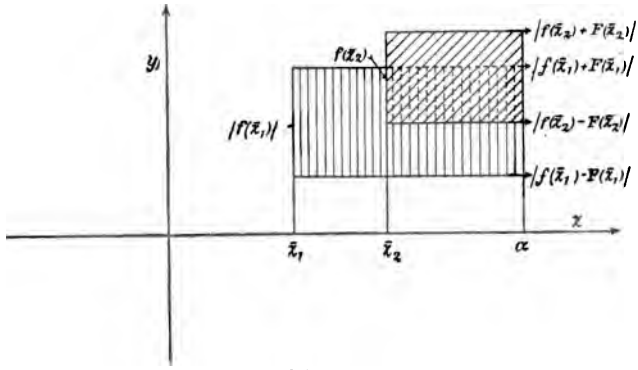

Fig. 1.

Aber die beiden Zahlen $f(\bar{x}_2) \pm F(\bar{x}_2)$ können nicht ausserhalb des Intervalls $f(\bar{x}_1) \pm F(\bar{x}_1)$ liegen, weil nach (4), welche für alle x zwischen $\bar{x}_1$ und a und also für $x = \bar{x}_2$ gilt,

$$f(\bar{x}_1) - F(\bar{x}_1) \leqq f(\bar{x}_2) \leqq f(\bar{x}_1) + F(\bar{x}_1)$$

ist, und von oben $F(\bar{x}_2) \leqq F(\bar{x}_1)$ ist. In dem Falle, dass die eine Zahl $f(\bar{x}_2) + F(\bar{x}_2)$ oder $f(\bar{x}_2) - F(\bar{x}_2)$ ausserhalb des Intervalls $f(\bar{x}_1) \pm F(\bar{x}_1)$ liegt, brauchen wir nur den Theil in Betracht zu ziehen, welchen die beiden Intervalle $f(\bar{x}_1) \pm F\bar{x}_1)$ und $f(\bar{x}_2) \pm F(\bar{x}_2)$ gemeinsam haben, weil nach (4) $f(x)$ nie ausserhalb $f(\bar{x}_1) \pm F(\bar{x}_1)$ liegen kann. In derselben Weise definieren wir die anderen successiven Grenzzahlen. Nun definieren wir zwei neue Functionen von $\bar{x}_1$, nämlich:

α) Es sei $\Phi(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_n) + F(\bar{x}_n)$ für alle $\bar{x}_n$ zwischen $\bar{x}_1$ und a, mit Ausnahme von dem Falle, wo

$$f(\bar{x}_n) + F(\bar{x}_n) > f(\bar{x}_{n-1}) + F(\bar{x}_{n-1}).$$

In diesem Falle sei

$$\Phi(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_{n-1}) + F(\bar{x}_{n-1}).$$

β) Es sei ebenso $\Psi(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_n) - F(\bar{x}_n)$ für alle $\bar{x}_n$ zwischen $\bar{x}_1$ und a, mit Ausnahme von dem Falle, wo

$$f(\bar{x}_n) - F(\bar{x}_n) < f(\bar{x}_{n-1}) - F(\bar{x}_{n-1}).$$

In diesem Falle sei

$$\Phi(\bar{x}_n) = f(\bar{x}_{n-1}) - F(\bar{x}_{n-1}).$$

Dann haben wir für alle x zwischen $\bar{x}_n$ und a

$$\Phi(\bar{x}_n) \geqq f(x) \geqq \Psi(\bar{x}_n).$$

Die beiden Limes $\underset{\bar{x}=a}{L}\ \Phi(\bar{x}_n)$ und $\underset{\bar{x}=a}{L}\ \Psi(\bar{x}_n)$ existieren, weil wenigstens von einer bestimmten Stelle an die eine Function immer zwischen endlichen Grenzen monoton abnimmt

und die andere immer monoton zunimmt. Die beiden Grenzwerte sind auch gleich, da die beiden Functionen sich von einander weniger als $2F(\bar{x}_n)$ unterscheiden und nach 3) ist

$$\underset{\bar{x}_n=a}{L}\ 2F(\bar{x}_n) = 0.$$

Wir setzen dann $\underset{\bar{x}_n=a}{L}\ \Phi(\bar{x}_n) = \underset{\bar{x}_n=a}{L}\ \Psi(\bar{x}_n) = A$. Wenn ferner $\bar{x}_n$ der Stelle a sich nähert, so nähert sich x gleichzeitig derselben Stelle, denn nach unserer Voraussetzung liegt x immer zwischen $\bar{x}_n$ und a. Also haben wir schliesslich

$$\underset{\bar{x}_n=a}{L}\ \Phi(\bar{x}_n) \geqq \underset{\bar{x}_n=a}{L}\ f(x) \geqq \underset{\bar{x}_n=a}{L}\ \Psi(\bar{x}_n)$$

und daraus folgt, dass

$$\underset{x=a}{L}\ f(x) = \underset{\bar{x}_n=a}{L}\ \Phi(\bar{x}_n) = \underset{\bar{x}_n=a}{L}\ \Psi(\bar{x}_n) = A,$$

was wir beweisen wollten.

In einer ähnlichen Weise könnten wir ein Kriterium für die Existenz des Doppellimes ableiten. Dieses Kriterium lautet so:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Limes $\underset{\substack{x=a\\y=b}}{L}\ f(x,y)$ existiert, ist, dass

$$\underset{\substack{x_1=a\\y_1=b\\x_2=a\\y_2=b}}{L}\ \{f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)\} = 0.$$

Zweites Kapitel.

Eigenschaften von Functionen zweier Veränderlichen, die in Bezug auf jede stetig sind.

§. 5. Indem wir in dem vorigen Kapitel die Eigenschaften des Doppellimes behandelt haben, sind wir jetzt in

der Lage, diese zu benutzen, um gewisse Eigenschaften von einer Function zweier Veränderlichen abzuleiten und insbesondere diejenigen, welche mit der Stetigkeit zu thun haben. Wir unterscheiden hier, wie vorher, zwischen zwei Arten von Stetigkeit, nämlich Stetigkeit in Bezug auf jede Veränderliche allein und in Bezug auf beide zusammen. Wir haben schon gesehen, dass eine Function $f(x, y)$ in einem Punkte (a, b) stetig in Bezug auf jede Veränderliche allein werden kann, und zwar auch bei jeder linearen Annäherung an die Stelle (a, b), und trotzdem nicht in Bezug auf beide. Wir wollen in diesem Kapitel sehen, wie diese zwei Arten von Stetigkeit sich verhalten, wenn wir statt eines einzelnen Punktes das ganze Gebiet, für welches die Function definiert ist, in Betracht ziehen. Wir wollen zuerst die Eigenschaften der Function innerhalb des Gebiets betrachten und nachher gewisse Eigenschaften der Function auf der Grenze des Gebiets. In dem dritten Kapitel wollen wir sehen, dass diese letzteren einen Zusammenhang mit der Convergenz einer unendlichen Reihe haben. In diesen Betrachtungen setzen wir voraus, dass unsere Function $f(x, y)$ innerhalb eines endlichen Gebiets

$$\alpha < x < \beta, \quad y_0 < y < y_n$$

eindeutig definiert ist, und, wenn es nicht anders besonders ausgedrückt ist, in Bezug auf jede Veränderliche stetig ist. Dieses führt uns zu den folgenden Ueberlegungen.

§ 6. Für irgend einen Punkt (a, b) des Gebiets haben wir

$$\underset{x=a}{L}\,\underset{y=b}{L} f(x, y) = \underset{y=b}{L}\,\underset{x=a}{L} f(x, y) = f(a, b).$$

Denn nach unserer Voraussetzung ist $f(x, y)$ stetig in x allein, und also, wenn wir y als eine Constante betrachten, haben wir nach der Definition der Stetigkeit

$$1) \qquad \underset{x=a}{L} f(x, y) = f(a, y).$$

Dieser Limes gilt für jedes y $(y_0 < y < y_n)$, und wenn wir nun in diesem Grenzwerte y als eine Variable ansehen, bil-

det $f(a,y)$ für sämmtliche y eine stetige Reihe von Werten, weil sie nichts anderes sind als die Werte unserer Function $f(x,y)$ für $x = a$. Aber nach unserer Voraussetzung ist $f(x,y)$ auch stetig in y allein für jedes x innerhalb des Gebiets, und also für $x = a$. Daraus, zusammen mit 1) folgt:

$$\underset{y=b}{L}\ \underset{x=a}{L} f(x,y) = \underset{y=b}{L} f(a,y) = f(a,b).$$

In einer ähnlichen Weise haben wir

$$\underset{x=a}{L}\ \underset{y=b}{L} f(x,y) = \underset{x=a}{L} f(x,b) = f(a,b)$$

und deshalb ist

$$\underset{x=a}{L}\ \underset{y=b}{L} f(x,y) = \underset{y=b}{L}\ \underset{x=a}{L} f(x,y) = f(a,b)$$

was wir eben beweisen wollen.

§ 7. Wenn wir eine beliebige, aber innerhalb eines Theils des Gebiets überall dichte Menge von Punkten in Betracht ziehen und $f(x,y)$ durch diese Punkte an irgend einer Stelle (a,b) des Theilgebiets sich so annähern lassen, dass x und y sich nicht gleichzeitig ändern, dann bekommen wir immer denselben Grenzwert, als wenn wir irgend eine andere überall dichte Menge desselben Theilgebiets gewählt hätten, nämlich $f(a,b)$.

Denn der Grenzwert eines Limes hängt nur von dem Werte der Function in der Umgebung des Grenzpunktes ab, durch welchen sie sich dem Grenzwert nähert. Wenn x und y sich nicht gleichzeitig ändern, dann nähert sich die Function der Grenzstelle schliesslich durch Functionswerte, die entweder einem constanten x, oder einem constanten y entsprechen, d. h. in unserem Falle entweder $x = a$, oder $y = b$. Da $f(x,y)$ für jedes constante x resp. y stetig in Bezug auf die andere Veränderliche ist, müssen wir einen und denselben Grenzwert für jedes System von Werten, die sich an der Grenzstelle verdichten, erreichen, nämlich $f(a,b)$. Daraus folgt unsere Behauptung.

§ 8. Die Function $f(x,y)$ kann in einer überall dichten Menge von Punkten irreguläre Stellen besitzen.

Wir wollen eine Function zusammenstellen, die diese Eigenschaften besitzt. Um dies zu thun, gehen wir von der Function

$$\Phi(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \text{ wo } \Phi(0,0) = 0,$$

und wo $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, aus. Wir haben schon gesehen, dass diese Function stetig in Bezug auf x allein und in Bezug auf y allein ist, aber an der Stelle $x = y = 0$ eine irreguläre Stelle hat[1]). Setzen wir $x = \sin^2 k!\,\pi x$ und $y = \sin^2 k!\,\pi y$, so erhalten wir

$$\Phi_k(x,y) = \frac{\sin^2 k!\,\pi x \cdot \sin^2 k!\,\pi y}{\sin^4 k!\,\pi x + \sin^4 k!\,\pi y}$$

Diese Function ist auch stetig in jeder Veränderlichen x und y allein. Wir wollen sehen, wo die irregulären Stellen dieser Function liegen. Für $k = 1$ haben wir

$$\Phi_1(x,y) = \frac{\sin^2 \pi x \quad \sin^2 \pi y}{\sin^4 \pi x + \sin^4 \pi x}.$$

Diese Function besitzt für die Wertepaare $x = 0, 1$, $y = 0, 1$, das heisst an den Stellen $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ eine irreguläre Stelle. Denn an jeder dieser Stellen existiert der Doppellimes nicht. Als Beispiel betrachten wir das Wertepaar $(0,1)$. Wenn x sich dem Werte Null nähert, dann muss y gleichzeitig sich dem Werte Eins nähern. Setzen wir demnach $x = y+1$, so erhalten wir den Grenzwert

$$\underset{y=0}{L} \frac{\sin^2 \pi(y+1) \cdot \sin^2 \pi y}{\sin^4 \pi(y+1) + \sin^4 \pi y} = \underset{y=0}{L} \frac{\sin^2 \pi y \cdot \sin^2 \pi y}{\sin^4 \pi y + \sin^4 \pi y} = \tfrac{1}{2}.$$

Setzen wir dagegen $x = 2y+1$, so bekommen wir

---

1) Vergl. § 2, Beispiel 2, und § 3.

$$\underset{y=0}{L}\frac{\sin^2\pi(2y+1)\cdot\sin^2\pi y}{\sin^4\pi(2y+1)+\sin^4\pi y}$$

$$=\underset{y=0}{L}\frac{4\sin^2\pi y\cdot\cos^2\pi y\cdot\sin^2\pi y}{16\sin^4\pi y\ \cos^4\pi y+\sin^4\pi y}=\tfrac{4}{17}.$$

Daraus folgt nach § 2, I, dass der Doppellimes $\underset{\substack{x=0\\y=0}}{L}\Phi_1(x,y)$ nicht existiert. Ebenso können wir zeigen, dass die Stellen $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$ irreguläre Stellen sind. An allen anderen Stellen ist die Function stetig in Bezug auf beide Veränderliche. Für $k=2$ haben wir

$$\Phi_2(x,y)=\frac{\sin^2 2!\ \pi x\cdot\sin^2 2!\ \pi y}{\sin^4 2!\ \pi x+\sin^4 2!\ \pi y}.$$

Diese Function hat die irregulären Stellen $(0,0)$, $(0,\frac{1}{2})$, $(0,1)$, $(\frac{1}{2},0)$, $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},1)$, $(1,0)$, $(1\frac{1}{2})$ und $(1,1)$; das heisst für $x=0,\ \frac{1}{2},\ 1$, $y=0,\ \frac{1}{2},\ 1$. An allen anderen Stellen convergiert die Function regulär. In dem allgemeinen Falle haben wir

$$\Phi_k(x,y)=\frac{\sin^2 k!\ \pi x\cdot\sin^2 k!\ \pi y}{\sin^4 k!\ \pi x+\sin^4 k!\ \pi y}.$$

$\Phi_k(x,y)$ hat irreguläre Stellen für jedes Coordinatenpaar (x,y), welches wir aus den Werten

$$x=0,\ 1/k,\ 2/k,\ \cdots\ k/k\,(=1)$$
$$y=0,\ 1/k,\ 2/k,\ \cdots\ k/k\,(=1)$$

wählen können, oder mit anderen Worten, an den Stellen

(1) $(00),(0,1/k)\cdots(1/k,0)\,(1/k\,1/k)\cdots(2/k,0)\,(2/k,1/k)\cdots(1,1).$

Denn an jeder dieser Stellen, etwa $(\alpha/k,\ \beta/k)$, existiert der Doppellimes nicht. Um dies zu zeigen, setzen wir $x=y+\alpha/k$, $y=y+\beta/k$. Dann haben wir als einen Grenzwert an der Stelle $(\alpha/k,\ \beta/k)$

$$\underset{y=0}{L}\frac{\sin^2 k!\ \pi(y+\alpha/k)\sin^2 k!\ \pi(y+\beta/k)}{\sin^4 k!\ \pi(y+\alpha/k)+\sin^4 k!\ \pi(y+\beta/k)}$$

$$=\underset{y=0}{L}\frac{\sin^4 k!\ \pi y}{2\sin^4 k!\ \pi y}=\tfrac{1}{2}.$$

Wenn wir aber $x = 2y + \alpha/k$, $y = y + \beta/k$ setzen, so erhalten wir

$$\underset{y=0}{L} \frac{\sin^2 k!\,\pi(2y+\alpha/k)\cdot \sin^2 k!\,\pi(y+\beta/k)}{\sin^4 k!\,\pi(2y+\alpha/k)+\sin^4 k!\,\pi(y+\beta/k)}$$

$$= \underset{y=0}{L} \frac{4\sin^2 k!\,\pi y\cdot\cos^2 k!\,\pi y\cdot \sin^2 k!\,\pi y}{16\sin^4 k!\,\pi y\cdot\cos^4 k!\,\pi y+\sin^4 k!\,\pi y} = \tfrac{4}{17}.$$

Da diese beiden Grenzwerte verschieden sind, folgt unsere Behauptung, dass $(\alpha/k, \beta/k)$ eine irreguläre Stelle ist. Ausserhalb der in (1) gegebenen Stellen ist die Function an jeder Stelle stetig in beiden Veränderlichen zusammen.

Nun wollen wir die verlangte Function $f(x, y)$ wie folgt definieren; es sei nämlich

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\Phi_n(x,y).$$

Diese Reihe convergiert an jeder Stelle, weil für alle n $\Phi_n \leqq \frac{1}{2}$ ist und also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\,\Phi_n(x,y) \leqq \tfrac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!},$$

wo $\sum \frac{1}{n!}$ eine convergente Reihe ist. Unsere Reihe, als eine Function in (x, n) bez. (n, y) betrachtet, convergiert ferner gleichmässig, und stellt deshalb eine stetige Function in x allein und in y allein dar[1]). Aber in Bezug auf (x, y) zusammen ist $f(x, y)$ in jedem noch so kleinen Intervalle unstetig. Denn das erste Glied unserer Reihe hat, wie wir oben gesehen haben, eine irreguläre Stelle an den Stellen $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Ebenso das zweite Glied an den Stellen $(0, 0)$, $(0, \frac{1}{2})$, $(0, 1)$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 0)$, $(1, \frac{1}{2})$, $(1, 1)$, und das n^{te} Glied an den Stellen $(0, 0)$, $(0, 1/n)$, $(0, 2/n) \cdots (1/n, 0) \cdots (1, 1)$. Allgemein befinden sich, wenn wir n gross genug wählen, die irregulären Stellen an jeder Stelle, wo die beiden Coordinaten rationale Zahlen sind. Das heisst, an den Stellen wo x und y die Gestalt $x = p/q$,

1) Vergl. § 23, III.

$y = p'/q'$ haben, wo p, p', q, q' alle ganze positive Zahlen sind, und q, q' zu p resp. p' prim sind. Denn wir brauchen n nur so gross zu wählen, dass $n!$ durch q und q' theilbar ist, um unser n^{tes} Glied, $\frac{1}{n!}\Phi_n(x, y)$, und also $f(x, y)$ an der Stelle $(p/q, p'/q')$ irregulär zu machen. An allen anderen Stellen ist $f(x, y)$ stetig in Bezug auf die beiden Veränderlichen. Da die Stellen, wo die beiden Coordinaten rationale Zahlen sind, überall dicht liegen, ist unsere Behauptung bewiesen.

§ 9. Wenn sich die Punkte, wo der Sprung in Bezug auf beide Veränderliche gleich oder grösser als a ist, verdichten, dann hat $f(x, y)$ in der Verdichtungsstelle selbst eine irreguläre Stelle, wo der Sprung gleich oder grösser als a ist.

Beweis. Es seien die in Betracht kommenden Punkte (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\cdots\cdots$, wo (x_0, y_0) die Häufungsstelle ist. Da in jedem dieser Punkte (x_k, y_k) der Doppellimes nicht existiert und der Sprung in Bezug auf beide Veränderliche gleich oder grösser als a ist, können wir in der Umgebung jedes Punktes (x_k, y_k) immer zwei Nachbarpunkte (ξ_k, η_k) und (ξ_k', η_k') so wählen, dass

$$f(\xi_k, \eta_k) - f(\xi_k', \eta_k') \gtrless a - \varepsilon, \tag{1}$$

wo ε eine positive Grösse, verschieden von Null ist. Wir können ε beliebig klein machen, indem wir die Punkte (ξ_k, η_k) und (ξ_k', η_k') hinreichend nahe an der Stelle (x_0, y_0) wählen, d. h. zeichnen wir um den Punkt (x_k, y_k) einen Kreis mit dem Radius ρ_k, dann ist ε eine Function von ρ_k und

$$\lim_{\rho_k = 0} \varepsilon(\rho_k) = 0.$$

Nun zeichnen wir um die Häufungsstelle (x_0, y_0) selbst einen Kreis mit Radius ρ_0. Innerhalb dieses Kreises liegen unendlich viele Punkte von dem System (x_k, y_k) und also von den beiden Systemen von Nachbarpunkten (ξ_k, η_k) und (ξ_k', η_k'). Da dies für beliebig kleine ρ_0 gilt, so haben die beiden Sy-

steme von Nachbarpunkten dieselbe Häufungsstelle wie das System (x_k, y_k), nämlich (x_0, y_0). Also für ein beliebig kleines ρ_0 können wir immer in der Umgebung von (x_0, y_0) zwei Nachbarpunkte finden, die der Gleichung (1) genügen, d. h. wir haben

$$f(\xi_0, \eta_0) - f(\xi_0', \eta_0') \gtreqless a - \varepsilon(\rho_0),$$

wo wir ε beliebig klein machen können, indem wir ρ_0 hinreichend klein wählen. Dieses Resultat sagt nichts anderes aus, als dass in dem Punkt (x_0, y_0) der Doppellimes

$$\underset{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}{L} f(x, y)$$

nicht existiert und dass der Sprung in Bezug auf beide Veränderliche gleich oder grösser als a ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

§ 10. Die irregulären Stellen, wo der Sprung in Bezug auf (x, y) grösser als eine hinreichend kleine, aber positive Zahl a ist, sind in keinem Theilgebiet überall dicht.

Beweis. Wir wollen das Gegentheil annehmen, nämlich wir wollen voraussetzen, dass in einem bestimmten Theilgebiet die irregulären Punkte, wo der (x, y)-Sprung grösser als a ist, überall dicht liegen, und zeigen, dass dies einen Widerspruch giebt. Um dies zu thun, wollen wir wie folgt verfahren.

Da die sämmtlichen Grenzpunkte unserer überall dichten Menge auch Punkte des Theilgebietes sind, so folgt aus § 9, dass an jeder Stelle die gegebene Function einen (x, y)-Sprung, grösser als a besitzt. Also auf irgend einer Linie (etwa $y = y_0$), die innerhalb des Theilgebiets und parallel zu der x-Achse liegt, ist auch jede Stelle ein Punkt, wo ein solcher (x, y)-Sprung sich befindet. Aber auf derselben Linie ist $f(x, y_0)$ eine stetige Function in x. Deshalb können wir um irgend einen Punkt $x = x_1$ ein Intervall (α, β) finden, so dass jeder Wert von $f(x, y_0)$ innerhalb dieses Intervalls sich von $f(x_1, y_0)$ weniger als eine vorgegebene, beliebig kleine positive Zahl σ unterscheidet, d. h. wo

(1) $$|f(x, y_0) - f(x_1, y_0)| < \sigma;\ \alpha < x < \beta.$$

ist.

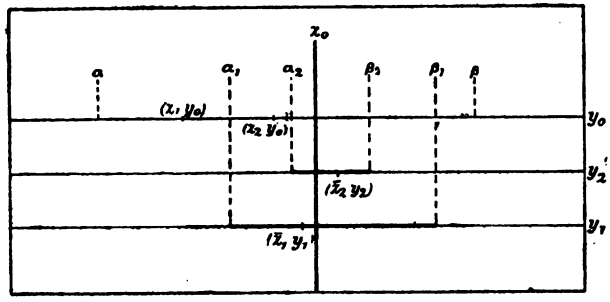

Fig. 2.

Aber in dem Punkte (x_1, y_0) existiert der Doppellimes nicht und die Function hat dort einen (x, y)-Sprung grösser als a. Aus der Definition des Doppellimes folgt, dass wir in jeder noch so kleinen Umgebung von (x_1, y_0) und also zwischen $x = \alpha$, $x = \beta$ einen Nachbarpunkt $(\bar{x}_1, y_1)$ so wählen können, dass

(2) $$|f(x_1, y_0) - f(\bar{x}_1, y_1)| > a/3$$

ist. Aber auf der Linie $y = y_1$ ist $f(x, y)$ auch stetig in x und also lässt sich um $\bar{x}_1$ ein Intervall (α_1, β_1) finden, innerhalb dessen wir haben

(3) $$|f(\bar{x}_1, y_1) - f(x, y_1)| < \sigma;\ \alpha_1 < x < \beta_1,$$

wo wir (α_1, β_1) so nehmen wollen, dass $\alpha < \alpha_1$, $\beta > \beta_1$ ist. Wenn wir σ hinlänglich klein nehmen, dann folgt durch Addition von (1), (2) und (3), dass

(4) $$|f(x, y_0) - f(x, y_1)| > a/4$$

für jeden Wert von x innerhalb des Intervalls (α_1, β_1) ist. Aber auf der Linie $y = y_0$ hat $f(x, y)$ an jeder Stelle innerhalb (α_1, β_1) einen (x, y)-Sprung, grösser als a. Also können wir innerhalb dieses Intervalls einen Punkt (x_2, y_0) und einen zu ihm gehörenden Nachbarpunkt $(\bar{x}_2, y_2)$, wo

$$\alpha_1 < \bar{x}_2 < \beta_1;\quad y_0 < y_2 < y_1$$

ist, so wählen, dass

$$|f(\bar{x}_2, y_2) - f(x_2, y_0)| > a/3 \tag{5}$$

ist. Vermöge der Stetigkeit von $f(x, y)$ in Bezug auf x auf der Linie $y = y_2$, haben wir

$$|f(x, y_2) - f(\bar{x}_2, y_2)| < \sigma \tag{6}$$

für jedes x innerhalb eines bestimmten Intervalls (α_2, β_2), welches wir so wählen wollen, dass $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ ist. Ferner, da (α_1, β_1) innerhalb des Intervalls (α, β) liegt, haben wir aus (1) die Ungleichung

$$|f(x_2, y_0) - f(x, y_0)| < \sigma; \quad \alpha_1 < x < \beta_1. \tag{7}$$

Denn durch Addition von (5), (6) und (7) erhalten wir, wenn wir σ hinlänglich klein nehmen

$$|f(x, y_2) - f(x, y_0) > a/4, \tag{8}$$

wo $\alpha_2 < x < \beta_2$, $y_0 < y_2 < y_1$ ist. Verfahren wir ebenso weiter, so haben wir im Allgemeinen

$$|f(x, y_s) - f(x, y_0)| > a/4, \tag{9}$$

wo $s = 1, 2, 3 \cdots\cdots$, $\alpha_s < x < \beta_s$, $y_0 < y_s < y_{s-1}$ ist. Die beiden Reihen

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots\cdots$$
$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \cdots\cdots$$

ändern sich monoton zwischen endlichen Grenzen und haben also eine bestimmte Grenze. Wir wollen sie ferner so wählen, dass

$$\underset{s=\infty}{L}\, \alpha_s = \underset{s=\infty}{L}\, \beta_s = x_0$$

ist. x_0 gehört dann zu jedem Intervalle (α_s, β_s), $s = 1, 2, 3 \cdots$, welches in Betracht kommt. Da nach unserer Voraussetzung

$$\underset{x=x_0}{L}\, f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$$

ist, haben wir aus (9) sofort

$$|f(x_0, y_s) - f(x_0, y_0)| > a/4; \; s = 1, 2, 3 \cdots\cdots \tag{10}$$

Die Reihe von Zahlen $y_1, y_2, y_3 \cdots$ hat, wie genommen, die Häufungszahl y_0. Also die Ungleichung (10) sagt aus, dass der Limes

$$\underset{y=y_0}{L} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$$

für $x = x_0$ ist, welches einen Widerspruch gegen unsere Voraussetzung giebt, nämlich dass der Limes

$$\underset{y=y_0}{L} f(x, y) = f(x, y_0)$$

für jedes x ist. Aus diesem Widerspruch folgt unser Satz.

§ 11. Wir haben in § 8 ein Beispiel einer Function $f(x, y)$ gegeben, die an einer überall dichten Menge von Punkten irreguläre Stellen besitzt. Der (x, y)-Sprung an allen diesen Stellen hatte nicht denselben Wert. An vielen Stellen war er eine sehr kleine Grösse. In der That, in jedem noch so kleinen Gebiet findet man Stellen, wo der Sprung beliebig klein ist. Wir wollen dies in einem Satz ausdrücken, indem wir sagen:

Die regulären Stellen bilden wenigstens eine überall dichte Menge[1]).

Beweis. Aus § 10 folgt, dass die Punkte, wo der (x, y)-Sprung grösser als irgend eine hinlänglich kleine positive Zahl a ist, in keinem Theil des Gebiets überall dicht liegen können. Es sei $a < x < \beta$, $\gamma < y < \delta$ irgend ein Theil des Gebiets, und $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n \cdots$ eine Reihe von Zahlen, wo $\underset{n=\infty}{L} \sigma_n = 0$. Dann können wir wenigstens einen Theil des Gebiets $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ finden, wo der (x, y)-Sprung an jeder Stelle kleiner als σ_1 ist. Es sei $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ dies Theilgebiet. Aus demselben Grunde können wir innerhalb des Theilgebiets $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1)$ ein anderes $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \delta_2)$ finden, wo an jeder Stelle der (x, y)-Sprung kleiner als σ_2 ist. Fahren wir so fort, so haben wir schliesslich ein Theilgebiet, wo an jeder Stelle der (x, y)-Sprung kleiner als σ_n ist. Die Reihen von Grössen

---

1) Vergl. Baire, Annali di Matematica, Sept. 1899, S. 27.

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots, \quad \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \cdots$$

$$\delta_1 < \delta_2 < \delta_3 < \cdots, \quad \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \cdots$$

ändern sich monoton zwischen endlichen Grenzen und besitzen also bestimmte Limes. Ferner wollen wir sie so wählen, dass

$$\underset{n=\infty}{L}\, \alpha_n = \underset{n=\infty}{L}\, \beta_n = x_0$$

$$\underset{n=\infty}{L}\, \gamma_n = \underset{n=\infty}{L}\, \delta_n = y_0.$$

Dann hat $f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) einen (x, y)-Sprung gleich $0 = \underset{n=\infty}{L}\, \sigma_n$, d. h. $f(x, y)$ convergiert regulär an dieser Stelle. Aber $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ war irgend ein Theil des gegebenen Gebiets von $f(x, y)$. Daraus folgt, dass in jedem noch so kleinen Theil des Gebiets sich wenigstens ein Punkt finden lässt, wo $f(x, y)$ eine reguläre Stelle besitzt.

§ 12. Bisher haben wir nur von Eigenschaften gesprochen, welche $f(x, y)$ innerhalb des gegebenen Gebiets besitzt. Die Function war auf dem Rand selbst nicht definiert. Wir wollen sie jetzt, wie vorher, innerhalb des Gebiets $a < x < b$, $y_0 < y < y_n$ überall stetig in Bezug auf jede der Veränderlichen allein voraussetzen und auch auf dem Rand definieren, nämlich so: Es sei etwa für $y = y_0$

$$f(x_0, y_0) = \underset{y=y_0}{L}\, f(x_0, y)$$

für jedes bestimmte x_0 des gegebenen Intervalls (a, b), a und b einbegriffen. Dann sind die sämmtlichen Limeswerte $f(x, y_0)$ die Werte von $f(x, y)$ für $y = y_0$. Wir wollen die Eigenschaften der Grenzfunction $f(x, y_0)$ in Bezug auf Stetigkeit untersuchen.

Eine Art des Grenzüberganges von $f(x, y)$ zu $f(x, y_0)$ giebt uns den Begriff der gleichmässigen Convergenz. Man versteht unter der gleichmässigen Convergenz einer Function $f(x, y)$ gegen eine Grenzfunction $f(x, y_0)$ dass, wenn wir y der Stelle y_0 für alle x gleichzeitig sich nähern lassen, wir in der Grenze die Function $f(x, y_0)$ bekommen. Dies verlangt eine weitere Bedingung von der oben benutzten Defi-

nition von $f(x, y_0)$, nämlich von der Bedingung, dass

$$(1) \qquad \lim_{y=y_0} f(x_0, y) = f(x_0, y_0)$$

für jedes x_0 des Intervalles ist, welches nichts anderes aussagt als die Bedingung, dass $f(x_0, y)$ an der Stelle $y = y_0$ stetig ist. Bei gleichmässiger Convergenz ist es nothwendig, dass für eine beliebige positive Zahl σ und für jedes y_1, welches zwischen $y_0 + \delta$ und y_0 liegt, der Ungleichung

$$(2) \qquad |f(x, y_1) - f(x, y_0)| < \sigma$$

gleichzeitig für alle in Betracht kommenden x genügt werden soll. Also gleichmässige Convergenz bezieht sich auf das ganze Intervall, dagegen hat der einfache Limes (1) nur mit einem einzelnen Punkte des Intervalls zu thun. Geometrisch verlangt der einfache Limes (1) nur, dass für jedes x_0 des Intervalls (a, b) und für eine beliebig kleine positive Zahl σ ein Rechteck $(f(x_0, y_0) \pm \sigma, y_0 + \delta)$ vorhanden sein muss, innerhalb dessen alle die Functionswerte $f(x_0, y_1)$ für $y_0 < y_1 < y_0 + \delta$ fallen müssen. δ ist hier eine Function von x und σ und kann sich also für ein bestimmtes σ mit x ändern. Dagegen gleichmässige Convergenz verlangt, dass δ für alle x des Intervalls gleich genommen werden kann, wenn wir zuerst σ beliebig nehmen, ihm dann aber für das ganze Intervall denselben Wert lassen. Also in diesem Fall kann δ als eine Function von σ allein betrachtet werden.

Wir können die Idee der gleichmässigen Convergenz geometrisch in einer anderen Weise deuten. Denken wir uns $z = f(x, y)$ als eine Fläche mit den Grenzen für x und y wie oben gegeben. Diese Fläche wird von der Ebene $y = y_1$ $(y_0 < y_1 < y_n)$ in einer Curve $z = f(x, y_1)$ geschnitten. Diese Curve nennt man eine Annäherungscurve. Sie ändert sich mit y_1 und, wenn $f(x, y)$ gegen $f(x, y_0)$ gleichmässig convergiert, dann muss, wenn y_1 sich der Stelle y_0 nähert, die ganze Curve $z = f(x, y_1)$ gleichzeitig sich der Curve $z = f(x, y_0)$ nähern. Oder denken wir uns alle die Annäherungscurven auf die Ebene $y = y_0$ projectiert, und es sei in der Ebene $y = y_0$ ein Streif von beliebiger Breite σ auf jeder Seite der Curve $z = f(x, y_0)$ gegeben, dann lässt sich immer ein

y_n so bestimmen, dass die Projection der Curve $z = f(x, y_n)$ innerhalb des Streifes fällt, und ferner die Projection von allen Annäherungscurven, welche zwischen $z = f(x, y_n)$ und $z = f(x, y_0)$ liegen, auch innerhalb desselben Streifes fallen. Dies gilt, wenn wir σ noch so klein nehmen und also haben wir in der Grenze die Curve $z = f(x, y_0)$ selbst.

§ 13. Wenn wir die Endpunkte unseres Intervalls (a, b) in unsere Definition der Function $f(x, y_0)$ einschliessen, sodass die sämmtlichen Functionswerte $f(x, y_0)$ eine perfekte Menge bilden, dann können wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn wir auf der Linie $y = y_0$ ein Intervall (a, b) nehmen, dann ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x, y)$ gegen $f(x, y_0)$ innerhalb des Intervalls (a, b) gleichmässig convergiert, dass an jeder Stelle des Intervalls (a und b eingeschlossen) die Function $f(x, y)$ regulär convergiert.

Beweis. Es sei, auf der Linie $y = y_0$, (x_0, y_0) irgend ein Punkt des Intervalls (a, b) (a und b eingeschlossen). Wir wollen zuerst beweisen, dass unsere Bedingung nothwendig ist, d. h.: Setzen wir voraus, dass $f(x, y)$ gegen $f(x, y_0)$ gleichmässig convergiert, dann müssen wir zeigen, dass um den Punkt (x_0, y_0) ein Gebiet $(x_0 - \delta_1,\ x_0 + \delta_2,\ y_0 \pm \delta)$ existiert, innerhalb dessen $f(x, y)$ an jedem Punkt (x, y) der Ungleichung

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \sigma \tag{1}$$

genügt, wo σ eine beliebig kleine positive Zahl ist, und wo ferner das Gebiet $(x_0 - \delta_1,\ x_0 + \delta_2,\ y_0 \pm \delta)$ so zu verstehen ist, dass, wenn (x_0, y_0) einer der Endpunkte a oder b ist, wir nur den Theil betrachten, welcher innerhalb des gegebenen Gebiets (a, b, y_0, y_n) liegt. δ hat denselben Wert für das ganze Intervall, weil $f(x, y)$ gleichmässig gegen $f(x, y_0)$ convergiert. Nach unserer Voraussetzung ist $f(x, y)$ eine stetige Function von y. Also haben wir

$$|f(x_0, y_0 \pm \delta) - f(x_0, y_0)| < \sigma/3. \tag{2}$$

Aber $f(x, y_0 \pm \delta)$ ist stetig in Bezug auf x, und daraus folgt, dass

(3) $$|f(x, y_0 \pm \delta) - f(x_0, y_0 \pm \delta)| < \sigma/3,$$

wo x innerhalb eines bestimmten Intervalls $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$ liegt, welches auf der Linie $y = y_0 \pm \delta$ definiert ist. Dann ist $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2, y_0 \pm \delta)$ das gesuchte Gebiet um den Punkt (x_0, y_0). Denn es sei (x, y) irgend ein Punkt innerhalb desselben. Da δ, wie wir oben bemerkt haben, dasselbe ist für alle x des gegebenen Intervalls (a, b) und also für das Intervall $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2)$, muss sich der Functionswert an der Stelle (x, y) von dem Functionswert an der Stelle $(x, y_0 \pm \delta)$, wo x für beide Stellen denselben Wert hat, um weniger als $\sigma/3$ unterscheiden; oder was dasselbe ist

(4) $$|f(x, y) - f(x, y_0 \pm \delta)| < \sigma/3,$$

wo $x_0 - \delta_1 < x < x_0 + \delta_2$, $y_0 < y < y_0 \pm \delta$ ist.

Durch Addition von (2), (3) und (4) erhalten wir

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \sigma.$$

Da (x, y) irgend ein Punkt des Gebiets $(x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_2, y_0 \pm \delta)$ war, sagt dieses Resultat nichts anderes aus, als dass an der Stelle (x_0, y_0) und also an jeder Stelle des Intervalls (a, b) (a und b eingeschlossen) $f(x, y)$ regulär convergiert. Also giebt unser Satz eine nothwendige Bedingung für die gleichmässige Convergenz von $f(x, y)$ gegen die Grenzfunction $f(x, y_0)$.

Die Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn für jedes vorgegebene, aber beliebig kleine positive σ existiert um jeden Punkt (x_0, y_0) des Intervalls (a, b) (a und b eingeschlossen) ein Gebiet von Dimensionen grösser als Null, innerhalb dessen kein Nachbarpunkt (ξ, η) vorhanden ist, welcher der Ungleichung

(5) $$|f(x_0, y_0) - f(\xi, \eta)| > \sigma$$

genügt. Die Dimensionen von diesen Gebieten sind für ein festes σ beide Functionen von x und als solche haben sie für das ganze Intervall (a, b) eine untere Grenze grösser als

Null. Denn wenn sie unter jede Grenze abnehmen, wenn x sich einer bestimmten Stelle $x = x_0$ nähert, dann findet man um (x_0, y_0) selbst kein Gebiet, welches von Nachbarpunkten, die (5) genügen, frei ist; und ferner die Grenzstelle (x_0, y_0) muss auch ein Punkt unseres Intervalls (a, b) werden, weil wir es so genommen haben, dass seine Punkte eine perfekte Menge bilden. Da also δ innerhalb (a, b) eine bestimmte untere Grenze hat, etwa δ', haben wir nur dieses δ' für das ganze Intervall zu wählen, um unsere ursprüngliche Definition von gleichmässiger Convergenz von $f(x, y)$ gegen die Grenzfunction $f(x, y_0)$ zu erfüllen. Damit ist unser Beweis erledigt.

Beispiel 1. Es sei $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, wo $f(0, 0) = 0$. Diese Function convergiert in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ nicht gleichmässig gegen die Function $f(x, 0)$, denn, wie wir in § 2 gesehen haben, existiert der Limes

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

nicht, und also hat $f(x, y)$ für $x = y = 0$ eine irreguläre Stelle.

Man sieht aus diesem Beispiele, warum es nötig ist, dass die Function bei gleichmässiger Convergenz auch an den Endpunkten des Intervalls regulär convergieren muss. Denn hätten wir $\frac{xy}{x^2 + y^2}$ nur für das Intervall $0 < x \leqq 1$ betrachtet, so würde sie an jeder Stelle des Intervalls regulär convergiert haben, aber in Bezug auf das ganze Intervall nicht gleichmässig.

Die Curven, in welchem die Fläche $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ von den zu der (z, x)-Ebene parallelen Ebenen geschnitten wird, geben uns die Annäherungscurven. Wenn wir diese Curven der Bequemlichkeit halber auf die (z, x)-Ebene projectieren, haben sie die folgende Gestalt.

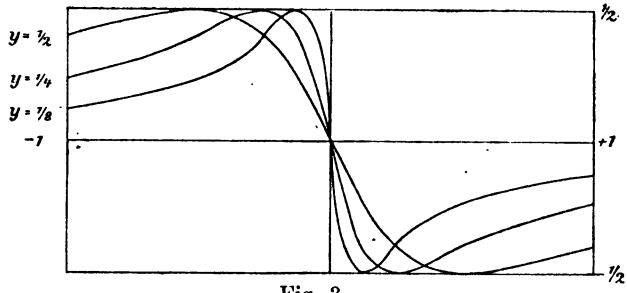

Fig. 3.

Sie haben alle eine Spitze von der Höhe $\frac{1}{2}$ und wenn y sich der Stelle Null nähert, so nähern sich diese Spitzen in der Projection der Curven nach und nach der Stelle $x = 0$, und gleichzeitig gehen in der Umgebung der Spitzen die Curven steiler und steiler in die Höhe. Die Curve $f(x, 0)$ selbst liegt für das ganze Intervall in der x-Achse. Also wenn wir einen Streifen von der Breite weniger als $\frac{1}{2}$ auf jeder Seite von $f(x, 0)$ nehmen, können wir keinen Wert von y, so wählen, dass die Projection von $z = f(x, y_s)$ in der (z, x)-Ebene innerhalb des Streifens fällt, und also fällt natürlich keine der Projectionen der Annäherungscurven für $0 < y_{s_1} < y_s$ innerhalb des Streifens, wie sie bei gleichmässiger Convergenz alle thun sollen.

Beispiel 2. Es sei gegeben $z = |x^2 - y^2|$, wo $-1 < x < +1$, $-1 < y + 1$. Diese Function convergiert

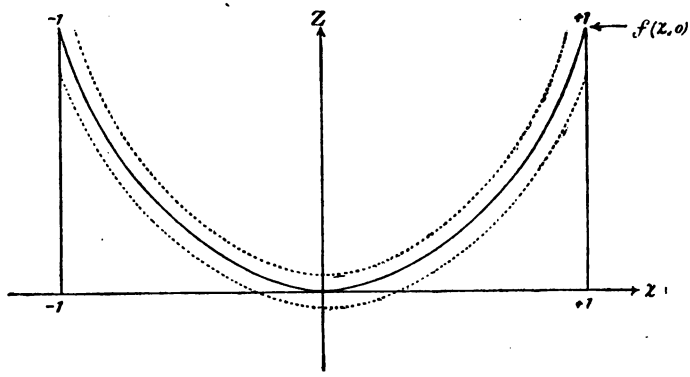

Fig. 4.

gleichmässig gegen die Function $f(x, 0)$, denn an jeder Stelle des Intervalls $-1 < x < +1$ convergiert sie regulär, weil

$$\underset{\substack{x=a\\y=0}}{L} |x^2-y^2| = a^2 = f(a,0),$$

wo a jeden Wert zwischen -1 und $+1$ annehmen kann. Die Curve $z = f(x,0)$ hat die Gestalt der in der Figur 4 gezeichneten Parabel, und die Projectionen der Annäherungscurven liegen immer innerhalb eines beliebig schmalen Streifens $f(x,0) \pm \sigma$, wenn y sich der Stelle $y = 0$ nähert. Also ergiebt sich in dem Limes die Curve $z = f(x,0)$ selbst.

§ 14. Der folgende Satz giebt uns auch ein Kriterium für die Existenz der gleichmässigen Convergenz der Function $f(x,y)$ gegen eine Grenzfunction $f(x,y_0)$. Er lautet so:

Wenn für jedes constante $y = y_s$ die Function $f(x,y)$ an jeder Stelle des Intervalls $a \leqq x \leqq b$ nach x differenzierbar ist, und zwar so, dass

$$|f'_s(x,y_s)| < G$$

ist, wo G eine endliche Zahl bedeutet, und ferner, wenn für eine überall dichte Menge von Werten von x, wir

$$\underset{y=y_0}{L} f(x,y) = f(x,y_0)$$

haben, dann convergiert $f(x,y)$ gleichmässig gegen die Function $f(x,y_0)$ innerhalb des gegebenen Intervalls[1]).

Beweis. Wir wollen ein System von Annäherungscurven betrachten, nämlich diejenigen Curven, in welchen die Fläche $z = f(x,y)$ von den Ebenen $y = y_1, y_2, y_3 \cdots y_s \cdots$ geschnitten werden, wo $y_1, y_2 \cdots, y_s, \cdots$ eine Reihe von Zahlen sind, die y_0 als eine Häufungsstelle haben. Nach unserer Voraussetzung existiert für alle x, $(a \leqq x \leqq b)$, die Ableitung $f'_s(x,y_s)$, wo y_s als eine Constante betrachtet ist. Diese Ableitung giebt uns an jeder Stelle die Richtung der Curve $z = f(x,y_s)$, d. h. sie giebt uns die trigonometrische Tangente des Winkels zwischen der Linie $y = y_s$ und der Tangente der Curve. Wir wollen diesen Winkel mit Φ_s bezeichnen. Dann ist für alle x und für jedes constante $y = y_s$

1) Dies ist eine Verallgemeinerung eines Satzes über unendliche Reihen von Bendixson. Vergl. „Öfversigt of kongl. Vetenskaps-Akademius Forhandlinger, Bd. 54, S. 605 – 622.

$$|f'(x, y_s)| = |\tan \Phi_s| < G.$$

Vermöge der Stetigkeit von $f(x, y)$ in x können wir um irgend einen Punkt $x = x_0$ $(a \leqq x_0 \leqq b)$ ein Intervall $(x_0 - \delta, x_0 + \delta')$ finden, sodass auf der Linie $y = y_1$ für jedes x innerhalb dieses Intervalls wir

$$|f(x, y_1) - f(x_0, y_1)| < \sigma$$

haben. Setzen wir der Bequemlichkeit halber

$$|f(x, y_s) - f(x, y_0)| \equiv R_{0,s}; \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta'$$

und es sei $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \cdots \sigma_n \cdots$ eine Reihe von Zahlen, wo $\underset{n=\infty}{L} \sigma_n = 0$ ist. Da $\underset{y=y_0}{L} f(x, y) = f(x, y_0)$ für eine überall dichte Menge constanter Werte von x innerhalb (a, b) ist, so können wir innerhalb jedes noch so kleinen Intervalles immer wenigstens einen Wert von x finden, sodass, wenn y_s an der Stelle $y = y_0$ sich nähert, $R_{0,s}$ auch für denselben Wert von x abnimmt. Es sei $x = \bar{x}$ ein solcher Wert innerhalb des Intervalls $(x_0 - \delta, x_0 + \delta')$. Aber wenn $R_{0,s}$ für $x = \bar{x}$ mit der Aenderung von y_s abnimmt, so muss $R_{0,s}$ für alle x in der Umgebung von $\bar{x}$ gleichzeitig abnehmen, oder es wird Punkte in derselben Umgebung geben, wo $|\tan \Phi_s|$ wächst und schliesslich grösser als G wird. Dies ist aber nach unserer Voraussetzung unmöglich und also, da die $\bar{x}$-Punkte innerhalb $(x_0 - \delta, x_0 + \delta')$ überall dicht liegen, können wir ein y_1 so wählen, dass

$$R_{0,1} \leqq \sigma_1; \quad y_0 < y_1 < y_0 \pm \vartheta$$

für alle x innerhalb $(x_0 - \delta, x_0 + \delta')$ ist. Aus demselben Grunde können wir ferner ein y_2 so wählen, dass

$$R_{0,2} \leqq \sigma_2; \quad y_0 < y_2 < y_1$$

auch für alle x innerhalb $(x_0 - \delta, x_0 + \delta')$. Fahren wir so fort, so haben wir für den allgemeinen Fall

$$R_{0,n} \leqq \sigma_n; \quad y_0 < y_n < y_{n+1}$$

für alle x innerhalb $(x_0 - \delta, x_0 + \delta')$. Wenn wir uns diesen Prozess unendlich viele Male wiederholt denken, so haben wir

$$\underset{n=\infty}{L} R_{0,n} \leqq \underset{n=\infty}{L} \sigma_n = 0$$

für alle x's innerhalb desselben Intervalls $(x_0 - \delta, x_0 + \delta')$, d. h., innerhalb dieses Intervalls convergiert $f(x, y)$ gegen $f(x, y_0)$ gleichmässig. Aber x_0 war irgend ein Punkt des gegebenen Intervalls (a, b), (a und b einbegriffen) und daraus folgt, dass $f(x, y)$ gleichmässig gegen $f(x, y_0)$ in der Umgebung von jedem Punkt innerhalb (a, b) und also in dem ganzen Intervalle convergiert.

§ 15. Die gleichmässige Convergenz giebt uns auch eine Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunction, welche wir in dem folgenden Satze ausdrücken können.

Wenn $f(x, y)$ gegen $f(x, y_0)$ innerhalb eines gegebenen Intervalles gleichmässig convergiert, dann ist $f(x, y_0)$ an jeder Stelle desselben Intervalls eine stetige Function von x.

Denn wir haben in § 13 gesehen, dass wenn $f(x, y)$ gleichmässig convergiert innerhalb des Intervalles (a, b), dann convergiert sie regulär an jeder Stelle des Intervalls (die Endpunkte einbegriffen). Also haben wir

$$\underset{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}{L} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

wo (x_0, y_0) irgend eine Stelle auf der Linie $y = y_0$ ist, welche innerhalb des Intervalls (a, b) (a und b selbst einbegriffen) liegt. Aber wir haben auch

$$\underset{y=y_0}{L} f(x, y) = f(x, y_0)$$

für jedes x des Intervalls in der Umgebung von (x_0, y_0). Also aus § 2, V folgt:

$$\underset{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}}{L} f(x, y) = \underset{x=x_0}{L} \underset{y=y_0}{L} f(x, y) = \underset{x=x_0}{L} f(x, y_0) = f(x_0, y_0),$$

welches aussagt, dass $f(x, y_0)$ an der Stelle $x = x_0$ stetig in x allein ist. Aber (x_0, y_0) war irgend eine Stelle des Intervalls (a, b) und also ist $f(x, y_0)$ an jeder Stelle des Intervalles stetig in x.

§ 16. Der in § 15 gegebene Satz giebt uns eine hinreichende, aber nicht eine nothwendige Bedingung für die Stetigkeit der Grenzfunction $f(x, y_0)$. Es giebt Functionen $f(x, y)$, welche nicht gleichmässig gegen eine Grenzfunction $f(x, y_0)$ convergieren, aber wo trotzdem $f(x, y_0)$ eine stetige Function von x ist. Die Function $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, (wo $f(0, 0) = 0$) ist eine solche Function. Wir haben in § 13, Beispiel 1, gesehen, dass sie gegen $f(x, 0)$ in dem Intervalle $0 \leqq x \leqq 1$ nicht gleichmässig convergiert. Sie ist aber für $y = 0$ stetig in x, da sie dann überall den constanten Wert Null hat. Wenn wir die Bedingung für die gleichmässige Convergenz etwas genauer ansehen, nämlich dass $f(x, y)$ an jeder Stelle regulär convergiert, dann sehen wir leicht, warum dieser Satz nicht auch eine nothwendige Bedingung dafür giebt, dass die Grenzfunction eine stetige Function ist. Damit die Limesgleichung

$$\lim_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

gilt, muss es um den Punkt (x_0, y_0) für jede beliebig kleine Zahl σ einen Bereich, etwa $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_2, y \pm \vartheta)$ geben, innerhalb dessen an jeder Stelle (x, y) die Ungleichung

$$|f(x, y)-f(x_0, y_0)| < \sigma \tag{1}$$

erfüllt ist. Also für jedes y_s, $y < y_s < y_0 \pm \vartheta$, müssen wir auf der Linie $y = y_s$ dasselbe Intervall $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)$ haben innerhalb dessen $f(x, y_s)$ der Ungleichung

$$|f(x, y_s)-f(x_0, y_s)| < \sigma_1 \tag{2}$$

für jedes x genügen muss, wo ferner

$$|f(x_0, y_s)-f(x_0, y_0)| < \sigma_2 \tag{3}$$

und $\sigma_1+\sigma_2 \leqq \sigma$ ist. Was wir hier besonders betonen wollen, ist dass wir für jedes $y = y_s$ dasselbe Intervall $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)$ für x haben müssen. Dies ist aber nicht nötig, wenn wir nur verlangen, dass $f(x, y)$ gegen eine stetige Function convergieren soll. Das Intervall für x auf der Linie

$y = y_s$, welches wir jetzt mit $(x_0 - \delta_s, x_0 + \delta'_s)$ bezeichnen wollen, kann in diesem Falle sich mit y_s ändern. Es muss für jedes y_s existieren und grösser als Null werden, aber wenn y_s sich der Stelle y_0 nähert, so kann es unter jede Grenze abnehmen. Beispielsweise ist dies der Fall bei der oben citierten Function $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $(f(0, 0) = 0)$ an der Stelle $x = 0$. Denn da längs der Linie $x = y$ $f(x, y)$ immer den obersten Wert der Function nämlich $\frac{1}{2}$ hat, so ist, wenn wir $\sigma < \frac{1}{2}$ nehmen

$$(x_0 - \delta_s, x_0 + \delta'_s) \leqq 2 \cdot y_s \sin 45^0,$$

oder im Limes haben wir

$$\underset{y_s=0}{L} (x_0 - \delta_s, x_0 + \delta'_s) \leqq \underset{y_s=0}{L} 2 \cdot y_s \cdot \sin 45^0 = 0.$$

Trotzdem ist die Function $f(x, 0)$ an der Stelle $x = 0$ stetig.

Eine hinreichende Bedingung für die Stetigkeit von $f(x, y_0)$ an irgend einer Stelle (x_0, y_0) des Intervalls (a, b) ist dadurch gegeben, dass wir für jede beliebig keine Zahl σ und für $y = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_k, \cdots$, wo $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \cdots \alpha_k \cdots$ eine an der Stelle $y = y_0$ dichte Menge von Zahlen ist ein vollständig definiertes Intervall $(x_0 - \delta_{\alpha_k}, x_0 + \delta'_{\alpha_k})$ grösser als Null haben, welches aber mit α_k sich ändern kann, und wo für jedes x innerhalb desselben wir

$$(4) \qquad |f(x, y_0) - f(x, \alpha_k)| < \sigma, \quad y_0 < \alpha_k \leqq y_0 \pm \vartheta$$

haben. Denn setzen wir dies voraus, dann können wir in der folgenden Weise zeigen, dass $f(x, y_0)$ für $x = x_0$ stetig ist. Wir haben

$$\underset{y=y_0}{L} f(x, y) = f(x, y_0)$$

für jedes x des Intervalls (a, b), a und b einbegriffen. Also für $x = x_0$ haben wir

$$(5) \qquad |f(x_0, y_s) - f(x_0, y_0)| < \sigma; \quad y_0 < y_s < y_0 \pm \vartheta.$$

Vermöge der Stetigkeit von $f(x, y)$ in Bezug auf x, giebt es

auf der Linie $y = y_s$ auch ein Intervall $(x_0 - \bar{\delta}_{y_s}, x_0 + \bar{\delta}'_{y_s})$, innerhalb dessen für jedes x wir

$$(6) \qquad |f(x, y_s) - f(x_0, y_s)| < \sigma; \quad y_0 < y_s < y_0 \pm \vartheta$$

haben. Es ist zu bemerken, dass die beiden Intervalle

$$(x_0 - \delta_{\alpha_k}, x_0 - \delta'_{\alpha_k}) \text{ und } (x_0 - \bar{\delta}_{y_s}, x_0 + \bar{\delta}'_{y_s})$$

für $y_s = \alpha_k$ nicht nothwendig dieselben sind. Das erste bezieht sich auf die in (4) gegebene Bedingung, dagegen das zweite auf die Stetigkeit von $f(x, y)$ in Bezug auf x für $y = y_s = \alpha_k$, welches ein anderes Intervall auf dieser Linie verlangen kann. Da $\underset{y_s = y_0}{L} f(x, y_s) = f(x, y_0)$ ist, ist dann auch $\underset{\alpha_k = y_0}{L} f(x, \alpha_k) = f(x, y_0)$ für jedes constante x $(a \leqq x \leqq b)$ oder, was dasselbe ist, wir haben

$$(7) \qquad |f(x, y_0) - f(x, y_s)| < \sigma; \quad y_0 < y_s \leqq y_0 \pm \vartheta$$

und

$$(8) \qquad |f(x, \alpha_k) - f(x, y_0)| < \sigma; \quad y_0 < \alpha_k \leqq y_0 \pm \vartheta.$$

Die Ungleichungen (4), (7) und (8) gelten für alle α_k zwischen y_0 und $y_0 \pm \vartheta$ und können also addiert werden. Daraus erhalten wir

$$(9) \qquad |f(x, y_0) - f(x, y_s)| < 3\sigma; \quad y_0 < y_s \leqq y_0 \pm \vartheta,$$

d. h. wenn (4) existiert, dann ist die Ungleichung (9) auch erfüllt für jedes x innerhalb eines bestimmten Intervalles $(x_0 - \delta_{y_s}, x_0 + \delta'_{y_s}) = (x_0 - \delta_{\alpha_k}, x_0 + \delta'_{\alpha_k})$, wo $y_0 < \alpha_k \leqq y_s$ ist. Nun können wir ϑ so wählen, dass die Ungleichungen (5), (6) und (9) gleichzeitig für jedes y_s zwischen y_0 und $y_0 \pm \vartheta$ erfüllt werden. Also können wir diese addieren und daraus erhalten wir

$$(10) \qquad |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < 4\sigma,$$

wo x_0 irgend einen Wert innerhalb des kleineren der beiden Intervalle $(x_0 - \delta_{y_s}, x_0 + \delta'_{y_s})$ und $(x_0 - \bar{\delta}_{y_s}, x_0 + \bar{\delta}'_{y_s})$ haben kann. Die Grössen δ_{y_s}, δ'_{y_s}, $\bar{\delta}_{y_s}$ und $\bar{\delta}'_{y_s}$ sind durch den Wert von y_s $(\neq y_0)$ bestimmt, welcher dem absoluten Betrage nach

der grösste ist von denen, die die Ungleichungen (5), (6) und (9) gleichzeitig erfüllen. Also giebt es auf der Linie $y = y_0$ ein bestimmtes Intervall grösser als Null, innerhalb dessen (10) für alle x erfüllt ist. Mit anderen Worten, $f(x, y_0)$ ist an der Stelle $x = x_0$ eine stetige Function von x. (x_0, y_0) war aber irgend eine Stelle des Intervalls (a, b) und also ist $f(x, y_0)$ an jeder Stelle stetig in x.

Die Ungleichung (4) giebt uns auch eine nothwendige Bedingung für die Stetigkeit von $f(x, y_0)$ an der Stelle (x_0, y_0). Denn wenn $f(x, y_0)$ an dieser Stelle stetig ist, so haben wir für ein beliebig kleines σ

$$|f(x_0, y_0) - f(x, y_0)| < \sigma/3 \tag{11}$$

für jedes x innerhalb eines bestimmten Intervalles $(x_0 - \overline{\delta}_0, x_0 + \overline{\delta}'_0)$. Nach unserer Voraussetzung ist

$$\underset{y=y_0}{L} f(x, y) = f(x, y_0) \text{ und also } \underset{\alpha_k=y_0}{L} f(x, \alpha_k) = f(x, y_0)$$

für jedes x innerhalb (a, b), a und b einbegriffen. Also für $x = x_0$ haben wir

$$|f(x_0, \alpha_k) - f(x_0, y_0)| < \sigma/3; \quad y_0 < \alpha_k \leqq y_0 \pm \vartheta. \tag{12}$$

Ferner ist $f(x, y)$ stetig in x, und daraus folgt, dass auf der Linie $y = \alpha_k$ es ein Intervall $(x_0 - \delta_{\alpha_k}, x_0 + \delta_{\alpha_k})$ giebt, innerhalb dessen für jedes x

$$|f(x, \alpha_k) - f(x_0, \alpha_k)| < \sigma/3; \quad y_0 < \alpha_k \leqq y_0 \pm \vartheta \tag{13}$$

ist. Die Ungleichungen (11), (12) und (13) gelten für alle α_k zwischen y_0 und $y_0 \pm \vartheta$. Addieren wir diese, so erhalten wir

$$|f(x, \alpha_k) - f(x, y_0)| < \sigma,$$

welches gilt für jedes x innerhalb des kleineren der beiden Intervalle $(x_0 - \delta_0, x_0 + \delta'_0)$ und $(x_0 - \overline{\delta}_{\alpha_k}, x_0 + \overline{\delta}'_{\alpha_k})$, wo $\overline{\delta}_{\alpha_k}$ und $\overline{\delta}'_{\alpha_k}$ auf der Linie $\alpha_k = y_0 \pm \vartheta$ bestimmt werden.

Arzelà hat diese Resultate zuerst in einen Satz zu-

sammengefasst[1]), welcher für unsern Fall folgendermassen lautet:

Wenn $\underset{y=y_0}{L} f(x,y) = f(x,y_0)$ für jedes constante $x = x_0$ $a \leqq x_0 \leqq b$ ist, dann ist die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x,y_0)$ an irgend einer Stelle (x_0, y_0) des Intervalls (a,b) eine stetige Function von x ist, dass für jedes beliebig kleine σ und für $y = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_k, \cdots$, wo $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \cdots \alpha_k \cdots$ eine an der Stelle $y = y_0$ dichte Menge von Zahlen sind, es um x_0 ein Intervall grösser als Null giebt, welches aber mit α_k sich ändern kann, und innerhalb dessen wir für jedes x haben

$$|f(x,\alpha_k) - f(x,y_0)| < \sigma.$$

§ 17. Die obige nothwendige und hinreichende Bedingung, dass die Grenzfunction $f(x,y_0)$ stetig sein soll, ist nicht immer erfüllt, wenn $f(x,y)$, wie in § 5 definiert ist, d. h. wenn $f(x,y)$ überall innerhalb des Gebiets $a < x < b$, $y_0 < y < y_n$ stetig in jeder Veränderlichen allein ist, und wenn für jedes x $(a \leqq x \leqq b)$ der Limes $\underset{y=y_0}{L} f(x,y) = f(x,y_0)$ ist, so kann $f(x,y_0)$ unstetig in x werden. Eine solche Function ist in dem folgenden Beispiele gegeben.

Beispiel 1. Es sei $f(x,y) = \dfrac{(1+\sin\pi x)^{1/y} - 1}{(1+\sin\pi x)^{1/y} + 1}$, wo $0 \leqq x \leqq 10$, und $0 < y \leqq 10$. Dann ist

$$f(x,0) = \underset{y=0}{L} \frac{(1+\sin\pi x)^{1/y} - 1}{(1+\sin\pi x)^{1/y} + 1},$$

welches für $x = 0, 1, 2, \cdots 10$ den Wert Null hat, weil dann $\sin\pi x$ gleich Null ist. Aber für $2n < x < 2n+1$ haben wir $0 < \sin\pi x < +1$ und also ist an einer solchen Stelle

---

1) Vergl. „Rendiconti dell' Accademia delle Scienze dell' Instituto di Bologna" 1884—85. Siehe auch seinen Vortrag „Sulla Serie di Funzioni" Accademia delle Scienze dell' Instituto di Bologna, Marz 1899.

$$f(x,0) = \underset{y=0}{L} \frac{(1+\sin\pi x)^{1/y}-1}{(1+\sin\pi x)^{1/y}+1} = \underset{y=0}{L} \frac{1-\dfrac{1}{(1+\sin\pi x)^{1/y}}}{1+\dfrac{1}{(1+\sin\pi x)^{1/y}}} = +1.$$

Dagegen für $n < x < 2n$ ist $0 > \sin\pi x > -1$ und daraus folgt, dass an diesen Stellen

$$f(x,0) = \underset{y=0}{L} \frac{(1+\sin\pi x)^{1/y}-1}{(1+\sin\pi x)^{1/y}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

Also ist $f(x, 0)$ an den Stellen $x = 0, 1, 2, \cdots 10$ unstetig in x.

Die Function $f(x, y_0)$ kann auch unstetig an einer überall dichten Menge von Punkten werden, was wir durch das folgende Beispiel zeigen wollen.

Beispiel 2. Es sei

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\cos n!\,\pi x)^{\frac{1}{y-1}},$$

wo $0 \leqq x \leqq 1$, $1 < y \leqq 2$ und $y_0 = 1$ ist. Wir müssen zuerst zeigen, dass diese Function innerhalb des gegebenen Gebiets stetig in jeder Veränderlichen ist und dass der Limes

$$\underset{y=1}{L} f(x_0, y) = f(x_0, 1); \quad 0 \leqq x_0 \leqq 1$$

existiert. Diese Reihe stellt eine stetige Function in Bezug auf x dar, denn setzen wir $y = a$, so erhalten wir eine unendliche Reihe von stetigen Functionen von x, die für jedes a $(1 < a < 2)$ gleichmässig convergieren, weil die Reihe des Maximums M_n der einzelnen Glieder absolut convergiert [1]). Denn haben wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M_n| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist eine convergente Reihe.

---

1) Vergl. § 22, III.

Ebenso stellt die gegebene Reihe für jedes constante $x = x_0$ $(0 \leqq x_0 \leqq 1)$ eine stetige Function in y dar. Denn setzen wir $x = x_0$, so bekommen wir eine Reihe von stetigen Functionen von y, welche innerhalb des Intervalls $1 \leqq y \leqq 2$ gleichmässig convergiert, weil die Reihe des Maximums M_n der einzelnen Glieder absolut convergiert. Wir haben nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} | M_n | = \sum_{n=1}^{\infty} | \frac{1}{n!} (\cos n! \pi x_0) | < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ ist, wie oben gesagt, bekanntlich eine convergente Reihe. Aus der gleichmässigen Convergenz dieser Reihe folgt, dass für jedes constante $x = x_0$ $(0 \leqq x_0 \leqq 1)$ wir

$$(1) \quad \lim_{y=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\cos n! \pi x_0)^{\frac{1}{y-1}} = \lim_{y=1} f(x_0, y) = f(x_0, 1)$$

haben [1]).

Nun wollen wir die Stetigkeit der Function $f(x, 1)$, welche die sämmtlichen Werte des obigen Limes hat, wenn x_0 der Reihe nach jeden Wert des Intervalls (0, 1) (0 und 1 einbegriffen) annimmt, untersuchen. Da (1), als eine Function von n und y betrachtet, gleichmässig für jedes in Betracht kommende x_0 convergiert, so können wir schreiben

$$f(x_0, 1) = \lim_{y=1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\cos n! \pi x_0)^{\frac{1}{y-1}} =$$

$$\lim_{y=1} (\cos \pi x_0)^{\frac{1}{y-1}} + \lim_{y=1} \frac{1}{2!} (\cos 2! \pi x_0)^{\frac{1}{y-1}} + \lim_{y=1} \frac{1}{3!} (\cos 3! \pi x_0)^{\frac{1}{y-1}}$$

$$+ \cdots\cdots + \lim_{y=1} \frac{1}{k!} (\cos k! \pi x_0)^{\frac{1}{y-1}} + \cdots\cdots$$

Der Limes $\lim_{y=1} (\cos \cdot \pi x_0)^{\frac{1}{y-1}}$ ist gleich eins für $x_0 = 0$; an

1) Vergl. § 22, IV.

allen anderen Punkten des Intervalls (0, 1) aber hat er den Wert Null. Ebenso ist der Limes $\underset{y=1}{L} \frac{1}{2!}(\cos 2!\,\pi x_0)^{\frac{1}{y-1}}$ gleich $\frac{1}{2}$ für $x_0 = 0, \frac{1}{2}, 1$, aber gleich Null für alle anderen Werte von x_0 innerhalb des Intervalls (0, 1). Im Allgemeinen ist der Limes

$$\underset{y=1}{L} \frac{1}{k!}(\cos k!\,\pi x_0)^{\frac{1}{y-1}} \text{ gleich } \frac{1}{k!} \text{ für } x_0 = 0, 1/k, 2/k \cdots k/k (= 1)$$

und an allen anderen Stellen gleich Null. Also wenn wir x_0 gleich irgend einem rationalen Wert zwischen 0 und 1 setzen, z. B. $x_0 = p/q$, wo p und q ganze und zu einander prime Zahlen sind, dann können wir k so gross wählen, etwa gleich q, dass $k!\,\pi x_0$ immer ein ganzzahliges Vielfaches von π ist. Dann wird der Limes

$$\underset{y=1}{L} \frac{1}{k!}(\cos k!\,\pi x_0)^{\frac{1}{y-1}} = 1/k!$$

an dieser beliebigen rationalen Stelle. Dagegen, setzen wir x_0 gleich irgend einem irrationalen Wert, dann können wir keinen noch so grossen endlichen Wert von k wählen, sodass $k!\,\pi x_0$ ein Vielfaches von π wird. Dann ist an irgend einer irrationalen Stelle $\cos k!\,\pi x_0 < 1$, und also ist an dieser Stelle der Limes

$$\underset{y=1}{L} \frac{1}{k!}(\cos k!\,\pi x_0)^{\frac{1}{y-1}} = 0.$$

Aus dieser Betrachtung folgt, dass die Function $f(x, 1)$ an allen irrationalen Stellen gleich Null ist, aber an allen rationalen Stellen von Null verschieden, d. h., sie ist an allen rationalen Stellen unstetig in x. Sie ist aber nicht an jeder Stelle des Intervalls unstetig, weil es in jedem Intervall einen Theil giebt, wo der Spruug in Bezug auf x kleiner als eine beliebig kleine Zahl σ ist. Mit anderen Wörten, die Unstetigkeitsstellen bilden nur eine überall dichte Menge.

§ 18. Wir wollen jetzt sehen, ob es vielleicht möglich ist, dass die Function $f(x, y_0)$ an jeder Stelle unstetig wer-

den kann, wo wie vorher $f(x, y_0)$ durch die sämtlichen Werte des Limes

$$\underset{y=y_0}{L} f(x, y) = f(x, y_0)$$

für jedes constante $x = x_0$ innerhalb eines Intervalls $a \leqq x \leqq b$ definiert ist, und wo $f(x, y)$ innerhalb des Gebiets $a < x < b$, $y_0 < y < y_n$ überall stetig in Bezug auf jede Veränderliche allein ist. Ehe wir aber diese Untersuchung durchführen können, müssen wir einige Eigenschaften einer an jeder Stelle discontinuirlichen Function einer Veränderlichen ableiten. Die erste von diesen lautet folgendermassen:

Wenn $f(x)$ an jeder Stelle unstetig ist, dann braucht der Sprung an allen Stellen nicht derselbe zu werden, und in der That kann er bei der Annäherung von x einer gewissen Stelle unter alle Grenzen grösser als Null abnehmen.

Wir wollen die Gültigkeit dieser Bekauptung durch das folgende Beispiel zeigen, wo diese Eigenschaft vorhanden ist.

Beispiel. Es sei $f(x) = \underset{n=\infty}{L} \Phi_n$; $0 < x \leqq 1$, wo $\Phi_n = \underset{t=0}{L} \frac{x \sin^2 n! \pi x}{\sin^2 n! \pi x + t^2}$ ist. Für irgend einen rationalen Wert von x, d. h. für $x = p/q$, wo p und q ganze und zu einander prime Zahlen sind, ist $f(x) = 0$. Denn wir brauchen nur n hinlänglich gross, nämlich höchstens gleich q, zu wählen, um an diesen Stellen $n! \pi x$ gleich einem Vielfachen von π und also $\sin^2 n! \pi x$ gleich Null zu haben. Daraus folgt für alle rationalen Stellen, dass

$$f(x) = \underset{n=\infty}{L} \left\{ \underset{t=0}{L} \frac{x \sin^2 n! \pi x}{\sin^2 n! \pi x + t^2} \right\} = \underset{n=\infty}{L} (0) = 0.$$

Dagegen für alle irrationalen Werte von x ist $f(x) = x$. Denn in diesem Falle können wir keinen noch so grossen endlichen Wert von n wählen, sodass $n! \pi x$ ein ganzzahliges Vielfaches von π wird, und also ist $0 < \sin^2 n! \pi x < 1$.

Deshalb haben wir für alle irrationalen Werte von x

$$f(x) = \underset{n=\infty}{L}\left\{\underset{t=0}{L}\frac{x\sin^2 n!\,\pi x}{\sin^2 n!\,\pi x + t^2}\right\} =$$

$$\underset{n=\infty}{L}\left\{\underset{t=0}{L}\frac{x}{1+\dfrac{t^2}{\sin^2 n!\,\pi x}}\right\} = \underset{n=\infty}{L}\frac{x}{1} = x.$$

Dann ist $f(x)$ gleich Null an allen rationalen und gleich x an allen irrationalen Stellen, wo $0 < x \leqq 1$ ist. Da der Punkt $x = 0$ selbst von dem Intervall ausgeschlossen ist, ist $f(x)$ an jeder Stelle unstetig, aber wenn x sich der Stelle $x = 0$ nähert, so hat der Sprung keine untere Grenze grösser als Null.

Es fragt sich nun, wie oft diese Eigenschaft einer total discontinuirlichen Function in einem gegebenen Intervall stattfinden kann, und darüber wollen wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn $f(x)$ an jeder Stelle eines gegebenen Intervalls (a, b) unstetig ist, dann können die Punkte, wo bei der Annäherung von x der Sprung unter alle positive und von Null verschiedene Grenzen abnimmt, nirgends überall dicht liegen.

Wir wollen das Gegentheil annehmen und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch mit unserer Voraussetzung führt. Es sei (α, β) ein Theil des gegebenen Intervalls, wo diese Punkte überall dicht liegen, und $\sigma_1, \sigma_2 \cdots \sigma_n \cdots$ eine Reihe von Zahlen, wo $\underset{n=\infty}{L}\sigma_n = 0$ ist. Da innerhalb (α, β) die Punkte überall dicht liegen, wo bei der Annäherung von x der Sprung unter alle positive und von Null verschiedene Grenzen abnehmen kann, können wir innerhalb (α, β) ein neues Intervall (α_1, β_1) so auswählen, dass an jeder Stelle der Sprung kleiner als σ_1 ist, und wo $\alpha < \alpha_1$, $\beta > \beta_1$ ist. Aus demselben Grunde können wir innerhalb (α_1, β_1) wieder einen Theil finden, wo an jeder Stelle der Sprung kleiner als σ_2 ist, und wo $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 < \beta_2$ ist. Fahren wir ebenso fort, so haben wir im Allgemeinen ein Theilintervall (α_n, β_n), wo an jeder Stelle der Sprung kleiner als σ_n ist und wo

(1) $$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_n < \cdots$$

(2) $$\beta > \beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \cdots > \beta_n > \cdots$$

ist. Wenn wir nun diesen Prozess unendlich oft wiederholt denken, so nähern sich die beiden Reihen (1) und (2) einer bestimmten Grenze, weil sie sich beide monoton ändern. Wir wollen sie so wählen, dass $\underset{n=\infty}{L}\ \alpha_n = \underset{n=\infty}{L}\ \beta_n = x_0$. Dann hat $f(x)$ an der Stelle $x = x_0$ einen Sprung kleiner oder gleich $\underset{n=\infty}{L}\ \sigma_n = 0$. Aber da der Sprung nie negativ werden kann, so muss $f(x)$ für $x = x_0$ einen Sprung gleich Null besitzen; d. h., $f(x)$ ist an dieser Stelle eine stetige Function, welches einen Widerspruch mit unserer Voraussetzung giebt, dass $f(x)$ an jeder Stelle unstetig sein soll. Damit ist unser Beweis erledigt.

Wenn innerhalb eines gegebenen Intervalls die Punkte einer Menge nicht überall dicht liegen, so ist es immer möglich, einen Theil des Intervalls zu finden, wo kein Punkt dieser Menge vorhanden ist. Also aus den obigen Betrachtungen folgt unmittelbar der folgende Satz:

Wenn $f(x)$ an jeder Stelle eines gegebenen Intervalls unstetig ist, dann giebt es immer wenigstens einen Theil des Intervalls, wo an jeder Stelle der Sprung grösser, als eine hinreichende kleine positive Zahl A ist.

Nun wollen wir zu unserer Hauptfrage dieses Paragraphen zurückkehren, nämlich ob die Function $f(x, y_0)$ wie oben definiert, an jeder Stelle des Intervalls (a, b) unstetig werden kann, und darüber wollen wir den folgenden Satz aussprechen:

Wenn $f(x, y)$ innerhalb des Gebiets $a < x < b$, $y_0 < y < y_n$ überall stetig in jeder Veränderlichen allein ist, und wenn $\underset{y=y_0}{L}\ f(x, y) = f(x, y_0)$ für jedes constante $x = x_0$ $(a \leqq x_0 \leqq b)$ ist, dann kann $f(x, y_0)$ nicht an jeder Stelle des Intervalls (a, b) unstetig werden[1]).

1) Vergl. Baire, Annali di Matematica, Sept. 1899, S. 27.

Beweis. Um unsere Behauptung zu beweisen, setzen wir das Gegentheil voraus, und zeigen, dass daraus ein Widerspruch folgt. Nach dem letzten Satz können wir dann auf der Linie $y = y_0$ wenigstens einen Theil des Intervalls (a,b) finden, wo an jeder Stelle die Function $f(x, y_0)$ einen Sprung grösser als eine hinreichend kleine, aber von Null verschiedene Zahl A macht. Es sei (α, β) dieses Theilintervall und x_0 irgend ein Punkt innerhalb desselben. Nach unserer Voraussetzung existiert der Limes

$$\lim_{y=y_0} f(x, y) = f(x, y_0)$$

für jedes constante x $(a \leqq x \leqq b)$ und also für $x = x_0$. Dann können wir ein $y = y_1$ so wählen, dass

$$(1) \qquad |f(x_0, y_1) - f(x_0, y_0)| < \sigma/2; \quad y_0 < y_1 < y_n.$$

ist. Da $f(x, y)$ für jedes y, für welches $f(x, y)$ definiert ist, eine stetige Function von x ist, dann giebt es für $y = y_1$ um $x = x_0$ ein Intervall (α_1, β_1) von der Ausdehnung grösser als Null, innerhalb dessen für alle x die Ungleichung

$$(2) \qquad |f(x, y_1) - f(x_0, y_1)| < \sigma/2; \quad y_0 < y_1 < y_n.$$

erfüllt ist. Die Ungleichungen (1) und (2) gelten für dieselben Werte von y und deshalb können wir diese addieren und erhalten so

$$(3) \qquad |f(x, y_1) - f(x_0, y_0)| < \sigma$$

d. h., wir können ein $y = y_1$ so wählen, dass für jedes x innerhalb eines bestimmten Intervalls (α_1, β_1) der entsprechende Functionswert $f(x, y_1)$ sich von $f(x_0, y_0)$ weniger als eine beliebig kleine Zahl σ unterscheidet. Aber die Function $f(x, y_0)$ ist an jeder Stelle unstetig und macht innerhalb (α, β) an jeder Stelle einen Sprung grösser als A. Also befindet sich innerhalb (α_1, β_1) wenigstens ein Punkt, etwa $x = x_1$, wo

$$(4) \qquad |f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)| > A$$

ist. Der Limes

$$\underset{y=y_0}{L} f(x,y) = f(x,y_0)$$

gilt auch für $x = x_1$. Dann können wir ein $y = y_2$ so nehmen, dass

$$(5) \qquad |f(x_1,y_2)-f(x_1,y_0)| < \sigma/2; \quad y_0 < y_2 < y_1.$$

Diese Ungleichung gilt nicht nur für y_2, sondern für jedes constante y zwischen y_0 und einem bestimmten Werte $y_0+\vartheta$, wo die letzte Zahl grösser oder kleiner als y_1 werden kann. Wir wollen aber unter diesen nur die eine Constante $y = y_2$ aussuchen und zwar so, dass y_2 zwischen y_0 und y_1 liegt, wie oben angezeigt ist. Vermöge der Stetigkeit von $f(x,y_2)$ in Bezug auf x, giebt es um x_1 ein Intervall (α_2, β_2), welches wir ganz innerhalb (α_1, β_1) nehmen können, und wo wir für jedes x innerhalb desselben haben

$$(6) \qquad |f(x,y_2)-f(x_1,y_2)| < \sigma/2; \quad y_0 < y_2 < y_1.$$

Durch Addition von (5) und (6) bekommen wir

$$(7) \qquad |f(x,y_2)-f(x_1,y_0)| < \sigma; \quad y_0 < y_2 < y_1$$

für jedes x innerhalb (α_2, β_2) wo $\alpha_1 < \alpha_2$, $\beta_1 > \beta_2$ ist. Dies sagt aus, dass, trotzdem innerhalb (α_1, β_1) jeder Wert der Function $f(x,y)$ für $y = y_1$ sich von $f(x_0,y_0)$ weniger als eine beliebig kleine vorgegebene positive Zahl σ unterscheidet, wir zwischen y_0 und y_1 ein y_2 so wählen können, dass für jedes x innerhalb eines bestimmten Intervalls (α_2, β_2), welches ganz innerhalb (α_1, β_1) liegt, die entsprechenden Functionswerte $f(x,y_2)$ sich von $f(x_1,y_0)$ um weniger als σ unterscheiden, wo aber dagegen der Unterschied zwischen $f(x_1,y_0)$ und $f(x_0,y_0)$ absolut genommen grösser als A ist.

Da $f(x,y_0)$ an jeder Stelle innerhalb (α_2, β_2) auch einen Sprung grösser als A macht, so können wir wieder innerhalb dieses Intervalls einen Punkt $x = x_2$ finden, sodass

$$(8) \qquad |f(x_2,y_0)-f(x_1,y_0)| > A$$

ist. Aber hier gilt auch der Limes

$$\underset{y=y_0}{L} f(x_2,y) = f(x_2,y_0)$$

und also können wir in derselben Weise wie vorher ein y_2 zwischen y_0 und y_1 so wählen, dass

$$(9) \qquad |f(x_2, y_2) - f(x_2, y_0)| < \sigma/2; \quad y_0 < y_2 < y_1$$

ist, und ferner um x_2 ein Intervall (α_2, β_2) ganz innerhalb (α_2, β_2) so nehmen, dass wir für jedes x innerhalb desselben haben

$$(10) \qquad |f(x, y_2) - f(x_2, y_2)| < \sigma/2 \quad y_0 < y_2 < y_1.$$

Da diese Ungleichungen für dieselben constanten Werte von y gelten, so können wir durch Addition erhalten

$$(11) \qquad |f(x, y_2) - f(x_2, y_0)| < \sigma.$$

Also alle Werte der Function $f(x, y_2)$ innerhalb (α_2, β_2) unterscheiden sich von $f(x_2, y_0)$ um weniger als σ, wo aber $f(x_2, y_0)$ und $f(x_1, y_0)$ einen Unterschied haben, welcher dem absoluten Betrage nach grösser als A ist.

Fahren wir ebenso fort, so bekommen wir in dem allgemeinen Falle ein Intervall (α_n, β_n) ganz innerhalb $(\alpha_{n-1}, \beta_{n-1})$, sodass für jedes x innerhalb desselben

$$(12) \qquad |f(x, y_n) - f(x_{n-1}, y_0)| < \sigma$$

ist, während zugleich:

$$|f(x_{n-1}, y_0) - f(x_{n-2}, y_0)| > A$$

ist. Die beiden Reihen

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \cdots < \alpha_{n-1} < \alpha_n \cdots$$

$$\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \cdots > \beta_{n-1} > \beta_n \cdots$$

nähern sich bei einem wachsenden n einer bestimmten Grenze, weil sie sich beide monoton ändern. Wir wollen sie so nehmen, dass

$$\underset{n=\infty}{L} \alpha_n = \underset{n=\infty}{L} \beta_n = \bar{x}.$$

Der Punkt $x = \bar{x}$ liegt also innerhalb jedes der oben betrachteten Intervalle. Dann haben wir wegen (3)

$$|f(x_0, y_0) - f(\bar{x}, y_1)| < \sigma,$$

und wegen (7)

$$|f(\bar{x}, y_2) - f(x_1, y_0)| < \sigma,$$

dagegen ist wegen (4)

$$|f(x_1, y_0) - f(x_0, y_0)| > A,$$

wo σ eine beliebig kleine positive Zahl ist. Nehmen wir $0 < \sigma < A/4$, so erhalten wir durch Addition

$$|f(\bar{x}, y_2) - f(\bar{x}, y_1)| > A/2.$$

In derselben Weise können wir zeigen, dass

$$|f(\bar{x}, y_3) - f(\bar{x}, y_2)| > A/2$$

sein muss. Im Allgemeinen ist

$$|f(\bar{x}, y_n) - f(\bar{x} y_{n-1})| > A/2, \quad n = 1, 2, \cdots$$

Wir wollen jetzt die folgende Reihe von Functionswerten betrachten, nämlich

$$f(\bar{x}, y_1),\ f(\bar{x}, y_2),\ f(\bar{x}, y_3) \cdots f(\bar{x}, y_n) \cdots$$

Der Unterschied zwischen je zwei auf einander folgenden Functionswerten ist grösser als $A/2$. Ferner haben wir die Zahlen $y_1, y_2, y_3, \cdots y_n \cdots$ so genommen, dass sie die Häufungsstelle y_0 haben. Aus dieser Betrachtung folgt dann, dass

$$\underset{\substack{y_n = y_0 \\ y_{n+1} = y_0}}{L} \{f(\bar{x}, y_n) - f(\bar{x}, y_{n+1})\} \neq 0,$$

weil dieser Unterschied immer grösser als $A/2$ ist. Deshalb ist das Kriterium[1]) für die Existenz des Limes $\underset{y = y_0}{L} f(x, y)$ für $x = \bar{x}$ nicht erfüllt. Dies giebt uns einen Widerspruch gegen unsere Voraussetzung, dass er für jedes x $(a \leqq x \leqq b)$ existieren soll. Aus diesem Widerspruch folgt unser Satz.

$f(x, y_0)$ kann also nur punktweise discontinuirlich werden.

---

1) Vergl. § 4.

§ 19. Mit Hülfe der in § 18 enthaltenen Sätze und mit denselben Bedingungen für $f(x, y_0)$ sind wir jetzt in der Lage, folgenden Satz zu beweisen:

Wenn $f(x, y)$ innerhalb des Gebiets $a < x < b$, $y_0 < y < y_n$ überall stetig in jeder Veränderlichen allein ist, und wenn $\underset{y=y_0}{L} f(x, y) = f(x, y_0)$ für jedes constante $x = x_0$ $(a \leqq x_0 \leqq b)$ ist, dann bilden die Punkte, wo $f(x, y)$ gegen $f(x, y_0)$ regulär convergiert, wenigstens eine überall dichte Menge.

Beweis. Wir haben dann die Voraussetzung, dass $f(x, y)$ in x allein und in y allein $(a < x < b,\ y_0 < y < y_n)$ stetig ist, und dass der Limes

$$\underset{y=y_0}{L} f(x, y) = f(x, y_0)$$

für jedes constante $x = x_0$ $(a \leqq x_0 \leqq b)$ existiert. Setzen wir ferner das Gegentheil von unserer Behauptung voraus, dann müssen wir innerhalb (a, b) wenigstens einen Theil desselben finden, wo in jedem Punkt eine irreguläre Stelle sich befindet. Es sei (α, β) dieser Theil. Innerhalb (α, β) können wir wenigstens einen Theil, etwa (α_1, β_1) finden, wo an einer überall dichten Menge von Stellen die Function $f(x, y)$ einen (xy)-Sprung grösser als eine hinreichend kleine, aber von Null verschiedene Zahl a hat, denn sonst würde es einen Theil des Intervalls geben, wo an jeder Stelle der (xy)-Sprung kleiner als jedes noch so kleine a ist, und also einen oder mehrere Punkte geben, wo $f(x, y)$ regulär convergiert. Daraus folgt nach § 9, dass innerhalb (α_1, β_1) $f(x, y)$ an jeder Stelle einen (xy)-Sprung, grösser als a hat.

Wir wollen zunächst zeigen, dass innerhalb (α_1, β_1) Punkte überall dicht liegen, wo $f(x, y_0)$ als eine Function in x betrachtet, einen Sprung grösser oder gleich einem bestimmten Wert (etwa $a/4$) macht. Um das zu thun, verfahren wir wie folgt. Nehmen wir auf der Linie $y = y_0$ irgend ein bestimmtes Intervall (γ, δ), welches innerhalb (α_1, β_1) liegt, und es sei (x_1, y_0) irgend ein Punkt innerhalb desselben. In diesem Punkte existiert der Doppellimes nicht, und die Function besitzt hier einen (xy)-Sprung grösser als a.

Also lässt sich in jeder noch so kleinen Umgebung von $x(_1, y_0)$ und deshalb zwischen $x = \gamma$, $x = \delta$ ein Nachbarpunkt $(\bar{x}_1, y_1)$ finden, wo der Functionswert sich von $f(x_1, y_0)$

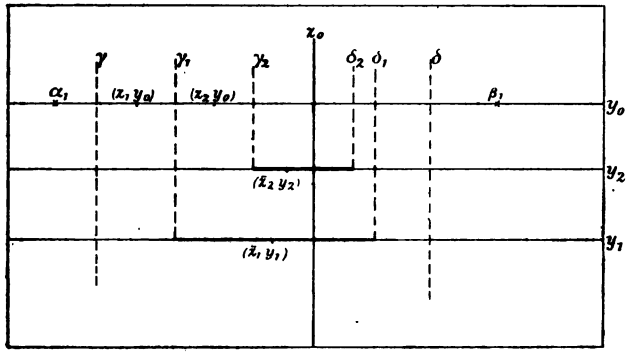

Fig. 5.

mehr als einem bestimmten Wert (etwa $a/3$) unterscheidet, d. h. wir haben

$$|f(\bar{x}_1, y_1) - f(x_1, y_0)| > a/3. \tag{1}$$

Vermöge der Stetigkeit von $f(x, y)$ in Bezug auf x können wir auf der Linie $y = y_1$ um $x = x_1$ ein Intervall (γ_1, δ_1) nehmen, innerhalb dessen die Ungleichung

$$|f(x, y_1) - f(\bar{x}_1, y_1)| < \sigma \tag{2}$$

für jedes x erfüllt ist. Wir wollen ferner das Intervall (γ_1, δ_1) so wählen, dass $\gamma < \gamma_1$, $\delta > \delta_1$ ist, und der Punkt (x_1, y_0) ausserhalb (γ_1, δ_1) liegt. Durch Addition von (1) und (2) erhalten wir für hinlänglich kleines σ

$$|f(x, y_1) - f(x_1, y_0)| > a/4; \quad \gamma_1 < x < \delta_1. \tag{3}$$

Nehmen wir wieder auf $y = y_0$ einen Punkt (x_2, y_0), welcher irgendwo innerhalb des Intervalls (γ_1, δ_1) liegt. Nach unserer Voraussetzung hat $f(x, y)$ an diesem Punkt auch einen (x, y)-Sprung grösser als a. Also können wir, wie oben einen Nachbarpunkt $(\bar{x}_2, y_2)$ $(\gamma_1 < \bar{x}_2 < \delta_1, \; y_0 < y_2 < y_1)$ finden, sodass

$$|f(\bar{x}_2, y_2) - f(x_2, y_0)| > a/3 \tag{4}$$

ist. Da $f(x, y_2)$ stetig in x ist, haben wir um $(\bar{x}_2, y_2)$ ein Intervall, etwa (γ_2, δ_2), innerhalb dessen für jedes x die Ungleichung

$$|f(x, y_2) - f(\bar{x}_2, y_2)| < \sigma \tag{5}$$

existiert, und wir wollen das Intervall (γ_2, δ_2) so nehmen, dass es ganz innerhalb (γ_1, δ_1) liegt, aber den Punkt (x_2, y_0) ausschliesst. Durch Addition von (4) und (5) erhalten wir

$$|f(x, y_2) - f(x_2, y_0)| > a/4 \tag{6}$$

für jedes x innerhalb (γ_2, δ_2) wenn wir in (5) σ nur hinreichend klein nehmen. Fahren wir ebenso fort, so bekommen wir im Allgemeinen

$$|f(x, y_s) - f(x_s, y_0)| > a/4, \tag{7}$$

wo $y_0 < y_s < y_{s-1}$, $\gamma_s < x < \delta_s$, $s = 1, 2, 3, \cdots\cdots$

Die beiden Reihen

$$\gamma < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 \cdots\cdot$$
$$\delta > \delta_1 > \delta_2 > \delta_3 \cdots\cdot$$

nähern sich einer bestimmten Grenze und wir wollen sie so nehmen, dass

$$\underset{s=\infty}{L} \gamma_s = \underset{s=\infty}{L} \delta_s = x_0$$

ist. x_0 liegt dann innerhalb jedes des in Betracht kommenden Intervalls (γ_s, δ_s). Die Reihe von Functionswerten

$$f(x_0, y_1),\ f(x_0, y_2),\ f(x_0, y_3),\ \cdots\cdots$$

hat den Grenzwert $f(x_0, y_0)$, weil die Zahlen $y_1, y_2, y_3 \cdots\cdot$ die Häufungszahl y_0 haben, und der Limes

$$\underset{y_s = y_0}{L} f(x_0, y_s) = f(x_0, y_0)$$

ist. Gleichzeitig aber nähert sich $x_1, x_2, x_3 \cdots$ der Stelle $x = x_0$ und also ergiebt sich aus (7) für $x = x_0$

$$|f(x_0, y_0) - \underset{x_s = x_0}{L} f(x_s, y_0)| > a/4 \tag{8}$$

d. h. der Limes $L_{x=x_0} f(x, y_0)$ existiert nicht und die Function $f(x, y_0)$ macht an der Stelle $x = x_0$ einen Sprung grösser als $a/4$. Da (γ, δ) irgend ein Theil des Intervalls (α_1, β_1) war, folgt es aus dieser Betrachtung, dass in jedem noch so kleinen Theil von (α_1, β_1) und also an einer überall dichten Menge von Punkten $f(x, y_0)$ einen Sprung grösser als $a/4$ macht.

Wenn aber die Punkte sich verdichten, wo eine Function einen Sprung grösser oder gleich einer bestimmten Zahl k macht, dann macht die Function an der Verdichtungsstelle selbst einen Sprung grösser oder gleich k[1]). Daraus folgt, dass unsere Grenzfunction $f(x, y_0)$ innerhalb (α_1, β_1) an jeder Stelle einen Sprung grösser als $a/4$ macht. Dies steht aber in Widerspruch mit dem in § 18 bewiesenen Satze, welcher behauptete, dass unsere Grenzfunction nicht an jeder Stelle unstetig werden kann. Aus diesem Widerspruch folgt unsere Behauptung.

Dies giebt uns ein allgemeineres Resultat als das in § 18, weil dort nur bewiesen war, dass $f(x, y)$ auf der Linie $y = y_0$ an einer überall dichten Menge von Stellen stetig in x allein ist. Dagegen haben wir hier das Resultat, dass $f(x, y)$ auf der Linie $y = y_0$ an einer überall dichten Menge von Stellen stetig in Bezug auf x und y zusammen ist.

§ 20. Wir haben in § 17 Beispiele einer Function betrachtet, wo $f(x, y)$ innerhalb des Gebiets $a < x < b$, $y_0 < y < y_n$ stetig in Bezug auf jede Veränderliche allein ist, und wo $L_{y=y_0} f(x, y) = f(x, y_0)$ für jedes $x = x_0$, $a \leqq x_0 \leqq b$ ist, aber wo trotzdem die Grenzfunction $f(x, y_0)$ an einer überall dichten Menge von Stellen unstetig war. Wenn aber die Function $f(x, y)$ an einer Stelle (x_0, y_0) unstetig in Bezug auf eine der Veränderlichen ist, so hat sie, wie wir früher gesehen haben[2]), an diesem Punkt eine irreguläre Stelle. Also zeigt dieses Beispiel uns die Gültigkeit des folgenden Satzes, nämlich:

---

1) Vergl. Schönflies, Göttinger Nachrichten 1899, S. 188.

2) § 3.

Wenn $f(x,y)$ innerhalb des Gebiets $a<x<b$, $y_0<y<y_n$ überall stetig in Bezug auf y und auf x ist, und wenn $L_{y=y_0} f(x,y) = f(x,y_0)$ für jeden constanten Wert von x ist, $(a \leqq x \leqq b)$, dann kann $f(x,y_0)$ an einer überall dichten Menge von Punkten irreguläre Stellen besitzen.

Drittes Kapitel.

Anwendung auf unendliche Reihen.

§ 21. Es sei gegeben eine unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,$$

wo jedes Glied $u_n(x)$ eine Function von x ist. Wir wollen

$$S_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)$$

setzen. Unsere unendliche Reihe stellt dann innerhalb eines gegebenen Intervalls (a,b) eine Function $F(x)$ dar, wenn innerhalb des Intervalls für jeden constanten Wert von x der Limes $L_{n=\infty} S_n(x)$ existiert. Wir wollen in den folgenden Betrachtungen annehmen, dass dies immer der Fall ist, und ferner, wenn das Gegentheil nicht besonders ausgedrückt ist, nehmen wir an, dass $u_n(x)$ und deshalb $S_n(x)$ eine stetige Function von x ist.

Wir haben dann hier auch mit einer Function von zwei Veränderlichen (n,x) zu thun, wo n nur für die ganzen positiven Zahlen definiert ist, aber wo x für jeden Wert definiert ist, für welchen $u_n(x)$ auch definiert ist. Um eine Beziehung zwischen der unendlichen Reihe und der vorher betrachteten Function $f(x,y)$ zu finden, denken wir uns $f(x,y)$ statt für jeden Wert von y nur für $y = y_1, y_2, y_3 \cdots y_n \cdots$ definiert, wo $y_1, y_2, y_3 \cdots y_n \cdots$ eine Gruppe von Zahlen bilden, welche die Häufungszahl Null besitzen. Wenn wir nun

$$f(x,y) = S(n,x) = S_n(x)$$

setzen, wo $y = 1/n$ ist, dann ist

$$F(x) = \underset{n=\infty}{L} S_n(x) = \underset{y=0}{L} f(x, y)$$

für jedes x innerhalb (a, b). Wenn wie im letzten Kapitel $f(x, y)$ stetig in y ist, dann bekommen wir denselben Grenzwert von $\underset{y=0}{L} f(x_0, y)$ $(a < x_0 = \text{constantes } x < b)$ für jede beliebige Menge von Werten von y, welche Null als eine Häufungsstelle haben, und also, wenn wir $f(x_0, y)$ der Grenze durch die Werte $y = y_1, y_2, y_3, \cdots y_n \cdots$ sich nähern lassen. Deshalb lassen sich alle diejenigen Sätze, welche wir in dem letzten Kapitel über die Grenzfunction $f(x, y_0)$ bewiesen haben, hier für die unendliche Reihe ohne weiteren Beweis übertragen. Es ist aber zu bemerken, dass dieser Prozess nicht umkehrbar ist, weil es möglich ist, dass der Limes $\underset{y=0}{L} f(x_0, y)$ existiert und gleich $f(x, 0)$ wird, wenn sich $f(x_0, y)$ durch die Werte $y_1, y_2, y_3 \cdots$ dem Grenzwert $f(x_0, y_0)$ nähert, aber nicht, wenn wir alle Werte von y in Betracht ziehen. Also folgt nicht, dass ein Satz über unendliche Reihen immer für den allgemeinen Fall gilt, wo $f(x, y)$ für jeden Wert von y definiert ist.

Eben wie im letzten Kapitel die Annäherungscurven dadurch gegeben waren, indem wir in $z = f(x, y)$ y durch eine Constante ersetzten, so sind hier diese Curven gegeben, wenn wir in $z = S_n(x)$ n gleich einer Constanten setzen. Wir wollen alle diese Curven auf die (z, x)-Ebene projectiert denken, weil dies bequemer ist, und sie gewöhnlich so betrachtet werden.

§ 22. Von dem Begriff der gleichmässigen Convergenz einer Function $f(x, y)$ gegen die Grenzfunction $f(x, y_0)$ haben wir sofort den folgenden Satz über die gleichmässige Convergenz einer unendlichen Reihe:

I. Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine unendliche Reihe innerhalb eines gegebenen Intervalls gleichmässig convergiert, ist, dass sie an jeder Stelle des Intervalls, die Endpunkte eingeschlossen, regulär convergiert.

Beispiel 1. Es sei die unendliche Reihe

$$f(x) = \left(\frac{x}{1+x^2} - 0\right) + \left(\frac{4x}{1+8x^2} - \frac{x}{1-x^2}\right) + \left(\frac{4x}{1+27x^2} - \frac{4x}{1+8x}\right) + \cdots$$

gegeben, wo $-1 \leqq x \leqq +1$ ist. Hier ist

$$S_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^2x^2}.$$

Die Reihe convergiert innerhalb des gegebenen Intervalls nicht gleichmässig, weil an der Stelle $x = 0$ der Limes $\underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} \frac{n^2x}{1+n^2x^2}$ nicht existiert. Denn setzen wir $n = \frac{1}{x}$, so erhalten wir

$$\underset{x=0}{L} \frac{1}{x+1} = 1.$$

Wenn wir dagegen $n = \frac{2}{x}$ setzen, erhalten wir

$$\underset{x=0}{L} \frac{4}{x+8} = \tfrac{1}{2}$$

und also folgt aus § 2, I, dass der Doppellimes nicht existiert. Die Annäherungscurven haben die folgende Gestalt.

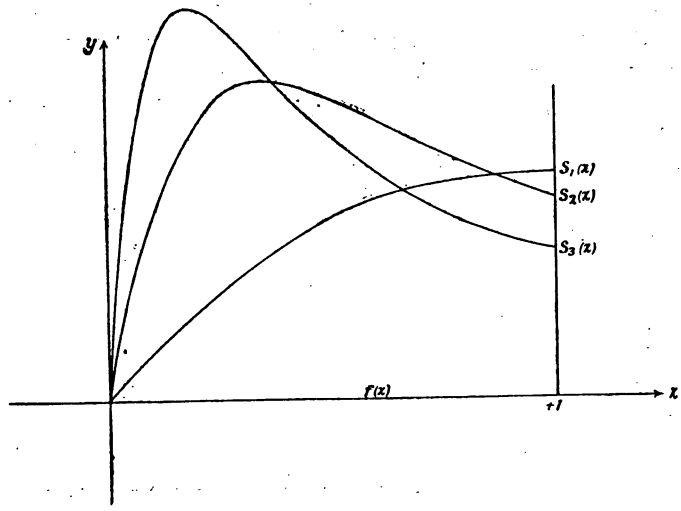

Fig. 6.

Beispiel 2. Gegeben die unendliche Reihe, dessen n^{tes} Glied ist

$$u_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \log(n^2x^2+1) - \frac{1}{2(n+1)} \log\left(\overline{n+1}^2 \cdot x^2+1\right).$$

Wir haben $f(x) = \frac{1}{2} \log(x^2+1)$. Die Reihe convergiert gleichmässig in irgend einem endlichen Intervalle, denn wir haben

$$\underset{\substack{n=\infty \\ x=a}}{L} S_n(x) = \underset{\substack{n=\infty \\ x=a}}{L} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \log(x^2+1) - \frac{1}{2(n+1)} \cdot \log\left(\overline{n+1}^2 x^2+1\right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \log(a^2+1) = f(a)$$

für jeden endlichen Wert von a.

Damit der Doppellimes $\underset{\substack{n=\infty \\ x=a}}{L} S_n(x)$ existiert, müssen wir denselben Grenzwert für alle n haben oder was wir vielleicht deutlicher durch zwei Indices ausdrücken können, indem wir sagen, dass der Limes $\underset{\substack{n=\infty \\ x=a}}{L} S_{n+p}(x)$ denselben Grenzwert haben muss, wenn wir p der Reihe nach die Werte $1, 2, 3 \cdots$ geben. Es ist aber möglich, dass für jedes x des gegebenen Intervalls der Limes $\underset{n=\infty}{L} S_n(x)$ existiert und dass der Limes $\underset{\substack{n=\infty \\ x=a}}{L} S_{n+p}(x)$ auch für besondere Werte von p existiert und gleich $f(x)$ ist, aber nicht für alle Werte von p. Dies giebt uns, was Dini „einfach gleichmässige Convergenz der unendlichen Reihe“ genannt hat[1]). Das folgende Beispiel ist ein solches.

Beispiel 3. Es sei in dem Intervalle $-1 < x \leqq +1$ eine Reihe gegeben, die nach dem folgenden Gesetz gebildet ist, nämlich

$$u_{2m-1} = \frac{x}{mx^2+(1-mx)^2} \qquad u_{2m} = \frac{-x}{(m+1)x^2+[1-(m+1)x]^2},$$

1) Dini-Lüroth, „Grundlage für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse“. S. 137.

wo $m = 1, 2, 3 \cdots$ ist, d. i. wir haben die Reihe

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1-x} - \frac{x}{2x^2+(1-x)^2} + \frac{x}{2x^2+(1-x)^2}$$

$$- \frac{x}{3x^2+(1-2x)^2} + \cdots .$$

Diese Reihe convergiert für jedes x des Intervalls und wir haben

$$f(x) = \frac{x}{x^2+(1-x)^2}.$$

Wenn n ungerade genommen wird, etwa $n = 2m-1$, dann haben wir

$$\underset{\substack{x=a\\n=\infty}}{L} S_n(x) = \underset{\substack{x=a\\n=\infty}}{L} \frac{x}{x^2+(1-x)^2} = \frac{a}{a^2+(1-a)^2} =$$

$$f(a);\ -1 \leqq a \leqq +1.$$

Aber wenn wir n gerade nehmen, etwa $n = 2m-2$, dann convergiert $S_n(x)$ an der Stelle $x = 0$ nicht regulär, denn wir haben

$$\underset{\substack{x=0\\n=\infty}}{L} S_n(x) = \underset{\substack{x=0\\n=\infty}}{L} \left\{ \frac{x}{x^2+(1-x)^2} - \frac{x}{mx^2+(1-mx)^2} \right\} \neq 0 = f(0)$$

weil, wenn wir zum Beispiel $x = \frac{1}{m}$ setzen, wir erhalten

$$\underset{\substack{x=0\\n=\infty}}{L} S_n(x) = \underset{\substack{x=0\\m=\infty}}{L} S_n(x) = - \underset{m=\infty}{L} \frac{1/m}{1/m} = -1.$$

Also der Doppellimes existiert nicht, wenn wir alle n's in Betracht ziehen, und deshalb convergiert die Rede innerhalb des gegebenen Intervalls nicht gleichmässig. Die Function $f(x)$ ist aber an jeder Stelle des Intervalls stetig.

Ein anderes Beispiel einer solchen Function befindet sich in Dini-Lüroth, S. 128, Fussnote. Eine solche Reihe hat immer die Eigenschaft, dass sie immer gegen eine stetige Function convergiert [1]).

1) Vergl. Dini-Lüroth, § 97.

Aus § 14 bekommen wir sofort das folgende Kriterium für die gleichmässige Convergenz einer unendlichen Reihe, nämlich:

II. Wenn innerhalb eines gegebenen Intervalls der Limes $L_{n=\infty} S_n(x)$ für eine überall dichte Menge von Werten von x existiert, und wenn für alle x des Intervalls und für alle endlichen Werte von n wir

$$|S_n'(x)| < G$$

haben, wo $S_n'(x)$ die Ableitung von $S_n(x)$ ist, und G eine endliche Zahl bedeutet, dann convergiert die Reihe innerhalb des gegebenen Intervalls gleichmässig[1]).

Beispiel 4. Es sei gegeben $S_n(x) = \frac{nx}{n^2x^2+1}$; $0 \leqq x \leqq 1$.

Dann convergiert die Reihe für eine überall dichte Menge von Werten von x innerhalb des gegebenen Intervalls, weil sie für jedes x convergiert. Für ein endliches n haben wir

$$S_n'(x) = \frac{n(1-n^2x^2)}{(n^2x^2+1)^2}.$$

Also für $x = 0$ ist $S_n'(0) = n$ und $L_{n=\infty} S_n'(0) = L_{n=\infty} n = \infty$, d. h. es giebt keine endliche Zahl G, welche unsern Satz erfüllt, und also convergiert die Reihe in dem gegebenen Intervalle nicht gleichmässig. Die Annäherungscurven haben hier ganz dieselbe Gestalt wie in Figur 2 gezeichnet war.

Der folgende Satz giebt uns auch ein sehr brauchbares Kriterium für die gleichmässige Convergenz einer unendlichen Reihe, und lässt sich auf den Doppellimes zurückführen. Er lautet folgendermassen:

---

1) Vergl. Bendixon, Öfversigt of kongl. Vetenskaps-Akademius Forhandlingar Bd. 54, S. 605—622. Arzelà: Vortrag „Sulla Surie di Funzioni, R. Accademia delle Scienze dell'Instituts di Bologna, Marz 1899, S. 58. Osgood: Monatshefte für Mathematik und Physik, Bd. IX, S. 340, Fussnote.

III. Wenn die Summe von den Maxima der einzelnen Glieder einer Reihe innerhalb eines gegebenen Intervalls absolut convergiert, so convergiert die Reihe gleichmässig.

Beweis. Setzen wir M_k gleich dem Maximalwert des Gliedes $u_k(x)$ der unendlichen Reihe, dann convergiert nach der Voraussetzung die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} |M_k|$$

d. h. der Limes $L_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} |M_k|$ existiert. Wir haben aber

$$|\text{Max. Wert von } S_n(x)| \leqq \sum_{k=1}^{n} |M_k|$$

und also muss der Limes

$$L_{n=\infty} |\text{Max. Wert von } S_n(x)|$$

auch für alle x innerhalb des gegebenen Intervalls existieren. Das heisst dass, wenn wir mit $x = x_0$ irgend einen Wert von x innerhalb dieses Intervalls (die Endpunkte einbegriffen) bezeichnen, es um (x_0, ∞) ein Gebiet giebt, innerhalb dessen für alle Werte von x und alle hinreichend grosse n, $S_n(x)$ der Ungleichung

$$|A - S_n(x)| < \sigma$$

genügt, wo σ eine beliebig kleine positive Zahl ist. Mit anderen Worten, an der Stelle $x = x_0$ existiert der Doppellimes $L_{\substack{x=x_0 \\ n=\infty}} S_n(x)$. Es bleibt noch übrig zu zeigen, dass dieser Limes gleich $f(x)$ ist, welches wir in der folgenden Weise beweisen wollen. Da die Reihe von den Maximalwerten der einzelnen Glieder an jeder Stelle absolut convergiert, so convergiert auch die gegebene Reihe an jeder Stelle. Also können wir nach § 2, V schreiben

$$L_{\substack{x=x_0 \\ n=\infty}} S_n(x) = L_{n=\infty} \; L_{x=x_0} \{u_1(x) + u_2(x) + \cdots u_k(x) \cdots + u_n(x)\}.$$

Aber nach unserer Voraussetzung ist $u_k(x)$ und also

$$\{u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x)\}$$

stetig in x. Also haben wir

$$\underset{n=\infty}{L}\ \underset{x=x_0}{L}\{u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)\} = \underset{n=\infty}{L}\{u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)\}$$

und da die Reihe für jedes constante x convergiert, so haben wir

$$\underset{n=\infty}{L}\{u_1(x_0)+u_2(x)+\cdots+u_n(x_0)\} = f(x_0).$$

Deshalb haben wir

$$\underset{\substack{x=x_0\\ n=\infty}}{L} S_n(x) = f(x_0),$$

d. h. die Reihe convergiert regulär an jeder Stelle innerhalb des gegebenen Intervalls (die Endpunkte einbegriffen) und also convergiert sie nach I innerhalb des ganzen Intervalls gleichmässig. Damit ist unser Beweis erledigt.

Beispiel 5. Es sei die Reihe

$$f(x) = 4/\pi\left\{\frac{\sin x}{1^2}-\frac{\sin 3x}{3^2}+\frac{\sin 5x}{5^2}\cdots\cdots\right\}$$

für endliches x gegeben. Die Reihe der Maximalwerte der einzelnen Glieder giebt uns, absolut genommen:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|M_k| = 4/\pi\{1/1^2+1/3^2+1/5^2+\cdots\cdots\}.$$

Diese Reihe convergiert, weil

$$4/\pi\{1/1^2+1/3^2+1/5^2+\cdots\cdots\} < \sum 1/n^2$$

ist, und die Reihe $\sum 1/n^2$ convergiert. Also nach dem oben beweisenden Satz convergiert die gegebene Reihe innerhalb jedes endlichen Intervalls gleichmässig. In diesem Falle haben die Annäherungscurven die folgende Gestalt:

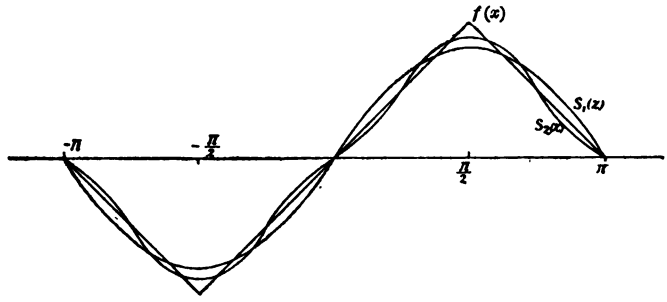

Fig. 7.

Aus § 15 des letzten Kapitels haben wir unmittelbar den folgenden Satz:

IV. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe stetige Functionen von x sind und die Reihe gegen $f(x)$ gleichmässig convergiert, dann ist $f(x)$ eine stetige Function.

§ 23. Der Satz IV § 22 giebt uns eine hinreichende, aber nicht eine nothwendige Bedingung für die Stetigkeit von $f(x)$.

Beispielsweise haben wir in den Beispielen 2, 3 und 4 der vorhergehenden Section Reihen betrachtet, welche nicht gleichmässig convergieren, aber wo $f(x)$ eine stetige Function ist. Aus § 16 erhalten wir die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass $f(x)$ eine stetige Function ist. Diese Bedingung für den Fall einer unendlichen Reihe ausgedrückt, lautet folgendermassen:

Wenn $S_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_k(x)+\cdots+u_n(x)$ ist, wo $u_k(x)$ eine stetige Function von x ist, und der Limes $L_{n=\infty} S_n(x)$ für jedes constante x ($a \leqq x \leqq b$) existiert und gleich $f(x)$ ist, dann ist die hinreichende und nothwendige Bedingung dafür, dass $f(x)$ an jeder Stelle des gegebenen Intervalls (a, b) eine stetige Function ist die, dass für jede ganze Zahl $n = m_1$ sich ein $m_2 > m_1$ finden und zwischen m_1 und m_2 wenigstens ein m so wählen lässt, dass wir für jedes x innerhalb eines bestimmten Intervalls grösser als Null, welches aber innerhalb (a, b) liegt und mit m sich ändern kann, haben

$$|S_m(x) - f(x)| < \sigma,$$

wo σ eine beliebig kleine Zahl ist[1]).

Diese Stetigkeitsbedingung unterscheidet sich auf der einen Seite von unserer Bedingung für gleichmässige Con-

1) Vergl. Arzela: Vortrag über Serie Funzioni, R. Accademia delle Scienze dell'Instituto di Bologna, März 1899, § 3. Vergl. auch Pringsheim: Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. II, Heft. I, S. 36.

vergenz und auf der andern Seite von der Dini'schen Bedingung für seine sogenannte einfach gleichmässige Convergenz. Unsere Bedingung für gleichmässige Cönvergenz verlangt, dass an jeder Stelle $x = x_0$, $(a \leqq x_0 \leqq b)$ der Doppellimes $\underset{\substack{x=x_0 \\ n=\infty}}{L} S_n(x)$ existiert und gleich $f(x_0)$ wird. Dann muss für jedes n grösser als ein bestimmtes $n = n'$ ein Intervall $(x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n')$ um x_0 definiert werden, wo für jedes x innerhalb desselben wir

$$| S_n(x) - f(x) | < \sigma$$

haben.

Das Intervall $(x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n')$ kann sich mit n ändern, aber muss immer existieren und grösser als Null werden. Da der Doppellimes an jeder Stelle existiert, so existiert auch der Limes $\underset{n=\infty}{L} S_n(x)$ für jedes x innerhalb des gegebenen Intervalls (a, b). So weit ist diese Bedingung ganz dasselbe wie die obige Bedingung für die Stetigkeit von $f(x)$. Sie unterscheidet sich aber davon, indem bei gleichmässiger Convergenz das für jedes n definierte Intervall $(x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n')$ eine untere Grenze grösser als Null haben muss, wenn n über alle Grenzen wächst. Dagegen braucht bei der Stetigkeitsbedingung, wie wir schon gesehen haben[1]), dieses Intervall keine untere Grenze grösser als Null zu haben. Sie unterscheidet sich noch ferner, indem es bei der Stetigkeitsbedingung genügend ist, wenn das Intervall $(x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n')$ für irgend eine Menge von Werten von n gegeben ist, welche sich an der Stelle $n = \infty$ verdichten, weil es dann für jedes hinlänglich grosse n vollständig definiert ist. In diesem Falle aber braucht das Intervall bei wachsendem n keine untere Grenze grösser als Null zu haben, und also braucht der Doppellimes nicht zu existieren, d. h. die unendliche Reihe braucht nicht an jeder Stelle des gegebenen Intervalls regulär zu convergieren und deshalb innerhalb des ganzen Intervalls auch nicht gleichmässig zu convergieren.

Andererseits unterscheidet sich diese Bedingung für die

1) § 16.

Stetigkeit von $f(x)$ von Dini's Bedingung für einfach gleichmässige Convergenz, indem bei einfach gleichmässiger Convergenz das Intervall $(x_0-\delta_n,\ x_0+\delta_n')$ eine untere Grenze grösser als Null haben muss, wenn wir eine bestimmte Menge von Werten von n in Betracht ziehen, welche sich an der Stelle $n=\infty$ verdichten. Es können aber andere Systeme von Werten von n vorhanden sein, welche sich auch an der Stelle $n=\infty$ verdichten, aber von der Beschaffenheit, dass, wenn n durch diesen Wert wächst, das Intervall keine untere Grenze grösser als Null besitzt. Wenn wir dann alle n in Betracht ziehen, so muss das Intervall $(x_0-\delta_n,\ x_0+\delta_n')$ für jedes n existieren, aber es braucht keine bestimmte untere Grenze zu haben, wenn n über alle Grenzen wächst, d. h., die Reihe muss gegen eine stetige Function convergieren, aber braucht nicht nothwendig gleichmässig gegen diese Grenzfunction zu convergieren.

Aus dieser Betrachtung folgt, dass, wenn die Stetigkeitsbedingung erfüllt ist, die Reihe nicht einfach gleichmässig und auch nicht gleichmässig zu convergieren braucht, und wenn die Bedingung für einfach gleichmässige Convergenz erfüllt ist, dann ist auch die Stetigkeitsbedingung erfüllt, aber nicht nothwendig die Bedingung für gleichmässige Convergenz. Wenn aber die Bedingung für gleichmässige Convergenz erfüllt ist, dann sind auch die Bedingungen sowohl für die Stetigkeit der Grenzfunction als für die einfach gleichmässige Convergenz gegen diese Function alle beide erfüllt. Das folgende Beispiel wird diese Unterschiede erklären.

Beispiel. Wir wollen dieselbe Reihe wie in § 22, Beispiel 3, wieder betrachten, nämlich es sei

$$\underset{n=\infty}{L} S_n(x) = f(x) = \frac{x}{x^2+1-x} - \frac{x}{2x^2+(1-x)^2} +$$

$$+\frac{x}{2x^2+(1-x)^2} - \frac{x}{3x^2+(1-2x)^2} + \cdots;\ (-1 \leqq x \leqq +1).$$

Wir haben dann, wie vorher

$$u_{2m-1} = \frac{x}{mx^2+(1-mx)^2},\ u_{2m} = \frac{-x^2}{(m+1)x^2+\{1-(m+1)x\}^2};$$

wo $m = 1, 2, 3 \cdots$ ist. Wenn wir nur die ungeraden Werte von n in Betracht ziehen, dann ist, wie wir gesehen haben,

$$\underset{\substack{n=\infty \\ x=x_0}}{L} S_n(x) = f(x_0)$$

für jedes $x = x_0$ innerhalb des Intervalls $(-1, +1)$. D. h. ein Intervall $(x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n')$ ist für jedes ungerade n definiert und ferner hat der Limes $\underset{n=\infty}{L} (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n')$ den Wert zwei. Dann nach dem obigen Satz ist die Function $f(x)$ stetig an jeder Stelle, weil das Intervall $(x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n')$ für eine an der Stelle $n = \infty$ dichte Menge von Werten von n existiert und also die Stetigkeitsbedingung erfüllt ist. Wenn wir dagegen nur die geraden Werte von n in Betracht ziehen, hat das Intervall um $x = 0$ für wachsende n keine untere Grenze grösser als Null. In diesem Falle existiert, wie wir gesehen haben, der Doppellimes $\underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} S_n(x)$ nicht, und wir bekommen den grössten absoluten Wert von $\left\{ \underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} S_n(x) - f(0) \right\}$ wenn wir x und n sich gleichzeitig entlang der Curve $x = \frac{1}{n}$ der Stelle $(x = 0, \; n = \infty)$ nähern lassen, nämlich den Wert Eins. Also wenn wir n gross genug nehmen, ist das Intervall

$$(x_0 - \delta_n, \; x_0 + \delta_n') \leqq \frac{2}{n}$$

und deshalb ist

$$L \; (x_0 - \delta_n, \; x_0 + \delta_n') \leqq L \; \frac{2}{n} = 0.$$

Wenn wir nun alle Werte von n in Betracht ziehen und es durch diese Werte über alle Grenzen wachsen lassen, so schwankt schliesslich das Intervall um $x = 0$ zwischen dem Werte 2 und Werten, die sich der Grenze Null nähern, und also hat das Intervall keine bestimmte untere Grenze. Deshalb convergiert die Reihe innerhalb des gegebenen Intervalls $(-1, +1)$ nicht gleichmässig, aber doch einfach

gleichmässig und convergiert auch gegen eine stetige Function

$$f(x) = \frac{x}{x^2+(1-x)^2}.$$

§ 24. Wir haben unmittelbar aus § 19 folgenden Satz in Bezug auf eine unendliche Reihe, nämlich:

Wenn $S_n(x) = u_1(x)+\cdots+u_k(x)+\cdots+u_n(x)$ ist, wo $u_k(x)$ eine stetige Function von x ist und wo der Limes $\underset{n=\infty}{L} S_n(x)$ existiert und gleich $f(x)$ für jedes x innerhalb eines gewissen Intervalls ist, dann convergiert die unendliche Reihe regulär an wenigstens einer überall dichten Menge von Stellen innerhalb dieses Intervalls.

§ 25. Wenn wir dieselben Vorraussetzungen wie in § 24 machen, so ist es auch möglich, dass die Grenzfunction $f(x)$ eine überall dichte Menge von irregulären Stellen besitzt, d. h. Stellen, wo der Doppellimes $\underset{\substack{n=\infty\\x=x_0}}{L} S_n(x)$ entweder nicht existiert, oder, wenn er existiert, nicht gleich $f(x_0)$ ist.

Um ein Beispiel einer solchen Reihe zu bilden, brauchen wir nur in dem Beispiel § 8 y durch $\frac{1}{n}$ zu ersetzen. Dann haben wir zuerst die Function

$$\Phi(x, n) = \frac{xn}{n^2x^2+1}; \quad -1 \leqq x \leqq +1$$

zu betrachten. Diese Function hat eine irreguläre Stelle an dem Punkte ($x = 0$, $n = \infty$), weil der Doppellimes

$$\underset{\substack{n=\infty\\x=0}}{L} \frac{nx}{n^2x^2+1}$$

nicht existiert. Z. B. setzen wir $n = \frac{1}{x}$, so erhalten wir

$$\underset{x=0}{L} \frac{x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}\cdot x^2+1} = \tfrac{1}{2}$$

und dagegen, wenn wir $n = \frac{2}{x}$ setzen, bekommen wir

$$\underset{x=0}{L} \frac{x \cdot \frac{2}{x}}{\frac{4}{x^2} x^2 + 1} = \tfrac{2}{5},$$

was nicht der Fall sein kann, wenn der Doppellimes wirklich existiert. Setzen wir nun nach dem Hankel'schen Verdichtungsgesetz [1]) $x = \sin^2 k!\,\pi x$, so haben wir

$$\Phi_k = \frac{n \sin^2 k!\,\pi x}{n^2 \sin^4 k!\,\pi x + 1},$$

wo man in derselben Weise, wie in § 8 zeigen kann, dass der Doppellimes $\underset{\substack{n=\infty \\ x=x_0}}{L} \Phi_k$ an den Stellen $x_0 = 0,\ 1/k,\ 2/k \cdots k/k$ nicht existiert. Dann besitzt die Function

$$f(x) = \underset{n=\infty}{L} S_n(x) = \sum_{\substack{n=\infty \\ k=1}}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{n \sin^2 k!\,\pi x}{n^2 \sin^4 k!\,\pi x + 1}$$

die verlangte Eigenschaft, denn der Limes $\underset{n=\infty}{L} S_n(x)$ existiert und ist gleich $f(x)$ für jedes x innerhalb des Intervalls $(-1 \leqq x < +1)$ und der Limes $\underset{\substack{n=\infty \\ x=x_0}}{L} S_n(x)$ existiert nicht, wenn x_0 eine rationale Zahl ist, weil, wenn dies der Fall ist, d. h. wenn x_0 von der Gestalt p/q ist, wo p und q ganze und zu einander prime Zahlen sind, wir nur k so gross zu wählen brauchen, dass $k!$ durch q theilbar ist, damit $\underset{\substack{n=\infty \\ x=x_0}}{L} \Phi_k$ und deshalb $\underset{\substack{n=\infty \\ x=x_0}}{L} S_n(x)$ nicht existiert. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Es ist zu bemerken, dass die oben gegebene Function

$$f(x) = \underset{n=\infty}{L} S_n(x)$$

nach den Eigenschaften des Hankel'schen Verdichtungsge-

1) Vergl. Dini-Lüroth, Grundlagen etc. S. 157.

setzes eine stetige Function ist[1]). Die Annäherungscurven haben in der Umgebung von jedem rationalen Punkte eine Spitze[2]).

§ 26. In § 23 haben wir die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür gegeben, dass $f(x)$ $[= \underset{n=\infty}{L} S_n(x)]$ eine stetige Function ist. Diese Bedingung ist aber nicht immer erfüllt, obgleich $S_n(x)$ eine stetige Function ist. Wir wollen diese Thatsache in dem folgenden Satz zusammenfassen, nämlich:

Wenn $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x) + \cdots + u_n(x)$ ist, wo $u_k(x)$ eine stetige Function ist, und wenn $\underset{n=\infty}{L} S_n(x) = f(x)$ für jeden Wert von x innerhalb eines gegebenen Intervalls ist, dann kann $f(x)$ unstetig werden.

Diese Behauptung ist eine Folgerung von dem in § 17 gegebenen Satz, aber wir wollen sie unabhängig zeigen, indem wir ein paar Beispiele betrachten, wo in dem ersten $f(x)$ an unendlich vielen Stellen und in dem zweiten an einer überall dichten Menge von Stellen unstetig ist.

Beispiel 1. Es sei gegeben

$$S_n(x) = (\sin \pi x)^{\frac{1}{2n+1}}$$

Dann ist $S_n(x)$ eine stetige Function von x für irgend einen endlichen Wert von n. Für $x = 0, 1, 2, 3 \cdots$ haben wir $\underset{n=\infty}{L} S_n(x) = 0$. Wenn dagegen x zwischen einer geraden und einer ungeraden Zahl liegt, d. h., wenn $2m < x < 2m+1$ ist, (wo $m = 0, 1, 2, \cdots$ ist), dann haben wir $\underset{n=\infty}{L} S_n(x) = +1$, weil $\sin \pi x$ dann immer positiv und grösser als Null ist. Wenn aber x zwischen einer ungeraden und einer geraden Zahl liegt, d. h. wenn $2m+1 < x < 2m$ ist ($m = 0, 1, 2 \cdots$) dann haben wir $\underset{n=\infty}{L} S_n(x) = -1$, weil $\sin \pi x$ in diesem Falle negativ ist. Also ist $f(x)$ in den Punkten $x = 0, 1, 2, 3 \cdots$ unstetig.

1) Dini-Lüroth, Grundlagen etc. § 114, 2.

2) Siehe Osgood, American Journal of Mathematics, Vol. XIX, S. 157.

Beispiel 2. Es sei gegeben

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (\cos k!\, \pi x)^{2n},\ 0 \leqq x \leqq 1.$$

Diese Reihe giebt uns für ein endliches n eine stetige Function und sie convergiert auch für jeden constanten Wert von x innerhalb des gegebenen Intervalls, weil für jeden solchen Wert ist

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} (\cos k!\, \pi x)^{2n} \leqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

für alle n und die Reihe $\sum \frac{1}{k!}$ convergiert. Da die gegebene Reihe, als eine Function in k und n betrachtet, gleichmässig convergiert, haben wir

$$(1) \qquad \underset{n=\infty}{L} S_n(x) = \underset{n=\infty}{L} (\cos \pi x)^{2n} + \underset{n=\infty}{L} \frac{1}{2!} (\cos 2!\, \pi x)^{2n}$$

$$+ \underset{n=\infty}{L} \frac{1}{3!} (\cos 3!\, \pi x)^{2n} + \cdots\cdots + \underset{n=\infty}{L} \frac{1}{k!} (\cos k!\, \pi x)^{2n} + \cdots\cdots.$$

Wenn nun x irgend eine rationale Zahl ist, d. h., wenn x von der Gestalt p/q ist, wo p und q ganze und zu einander prime Zahlen sind, und wenn wir von den niedrigsten nach den höchsten Gliedern hingehen, finden wir schliesslich ein Glied, wo $k!$ durch q theilbar ist. Für alle vorhergehenden Glieder ist $(\cos k!\, \pi x)^2 < 1$ und also

$$\underset{n=\infty}{L} \frac{1}{k!} (\cos k!\, \pi x)^{2n} = 0.$$

Aber von diesem Glied an haben wir

$$(\cos k!\, \pi x)^{2n} = 1^{2n} = 1$$

und also ist für einen solchen Wert von x

$$\underset{n=\infty}{L} S_n(x) > 0.$$

Wenn dagegen x einen irrationalen Wert besitzt, dann ist immer für jedes noch so grosse k, $(\cos k!\, \pi x)^2 < 1$ und also

$$\lim_{n=\infty} \frac{(\cos k!\,\pi x)^{2n}}{k!} = 0.$$

Deshalb stellt unsere Reihe eine Function dar, welche an jeder rationalen Stelle grösser als Null und an allen anderen Stellen gleich Null ist. Sie ist dann an jeder rationalen und also an einer überall dichten Menge von Stellen unstetig.

§ 27. Nun fragt es sich, ob unter denselben Voraussetzungen wie vorher, nämlich dass $S_n(x)$ für jeden endlichen Wert von n eine stetige Function von x ist, und dass $\lim_{n=\infty} S_n(x) = f(x)$ für jedes in Betracht kommende x wird, vielleicht $f(x)$ an jeder Stelle unstetig werden kann. Die Antwort dieser Frage ergiebt sich ohne ferneren Beweis aus dem allgemeineren Falle, welchen wir schon in § 18 ausführlich behandelt haben. Sie lautet folgendermassen:

Wenn $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x) + \cdots + u_n(x)$ ist, wo $u_k(x)$ eine stetige Function von x ist, und wenn der Limes $\lim_{n=\infty} S_n(x)$ für jedes x eines gegebenen Intervalls existiert und gleich $f(x)$ ist, dann kann $f(x)$ nie an jeder Stelle des Intervalls unstetig werden.

Also unter diesen Voraussetzungen kann $f(x)$ nur höchstens punktweise unstetig werden.

§ 28. Wir haben schon in § 24 gezeigt, dass so lange als $S_n(x)$ für jedes endliche n eine stetige Function ist, und ferner der Limes $\lim_{n=\infty} S_n(x)$ für jeden constanten Wert von x innerhalb eines gegebenen Intervalls existiert und gleich $f(x)$ ist, $S_n(x)$ innerhalb dieses Intervalls regulär an wenigstens einer überall dichten Menge von Stellen convergiert. Also unter diesen Voraussetzungen ist es unmöglich, dass $S_n(x)$ nur an einer einzelnen Stelle regulär und an allen anderen Stellen nur einfach convergiert. Wir wollen jetzt sehen wie es ist, wenn wir die eine oder die andere von unsern Voraussetzungen fallen lassen. Zuerst wollen wir annehmen, dass $S_n(x)$ stetig ist, aber nur für einen einzelnen Wert von x convergiert und für alle andern Werte von x divergiert.

In diesem Falle können wir die folgende Behauptung aufstellen:

Wenn $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x) + \cdots + u_n(x)$ ist, wo $u_k(x)$ eine stetige Function von x ist, so ist es möglich, dass $S_n(x)$ nur für einen Wert von x convergiert und an dieser Stelle auch regulär gegen $f(x)$ convergiert.

Das folgende Beispiel giebt eine solche Function.

Beispiel. Es sei $S_n(x) = u_1(x) + \cdots + u_n(x)$, welche nach dem folgenden Gesetz gebildet ist:

$$u_{2k-1}(x) = \frac{(2k+2)x^2}{2k+1}, \quad u_{2k}(x) = \frac{-x^2(2k)}{2k-1}; \; k = 0, 1, 2, 3 \cdots.$$

Diese Reihe convergiert nicht für $x \neq 0$, weil die nothwendige Bedingung $\underset{n=\infty}{L} u_n = 0$ nicht erfüllt ist. Für $x = 0$ aber ist jedes Glied gleich Null und also convergiert $S_n(x)$. Wir haben ferner $S_n(x)$ gleich Null, wenn n gerade ist und gleich $\frac{n+1}{n} \cdot x^2$, wenn n ungerade ist. Daraus folgt, dass

$$\underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} S_n(x) = \left\{ \begin{array}{l} \underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} 0 \text{ für } n \text{ gerade} \\ \underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} \frac{n+1}{n} \cdot x^2 \text{ für } n \text{ ungerade} \end{array} \right\} = 0 = f(0).$$

Also convergiert $S_n(x)$ nur für den Wert $x = 0$, und an dieser Stelle auch regulär.

In dem obigen Beispiel existiert der Limes $\underset{n=\infty}{L} S_n(x)$ für $x \neq 0$ nicht, weil, wenn n über alle Grenzen wächst, $S_n(x)$ zwischen zwei verschiedenen Grenzen schwankt. Diese Grenzen wären aber beide endlich. Wenn ausserhalb des einzelnen Wertes von x, für welchen $S_n(x)$ convergiert, der Grenzwert bei dem Limesübergang von $S_n(x)$ für $n = \infty$ zwischen Werten schwankt, von denen entweder der eine, oder beide unendlich sind, oder, wenn $S_n(x)$ bei wachsendem n über alle Grenzen wächst, dann ist es unmöglich, dass $S_n(x)$ nur an einer Stelle convergiert und dort auch regulär convergiert. Denn es sei $x = x_0$ der einzelne Wert, für

welchen $S_n(x)$ convergiert. Dann befinden sich unter diesen Umständen innerhalb jeder noch so kleinen Umgebung von $(x = x_0, n = \infty)$ immer Werte von x und n, welche der Ungleichung

$$|S_n(x) - f(x_0)| > \sigma$$

genügen, wenn σ beliebig klein genommen wird. Also nach der Definition des Doppellimes kann er an dieser Stelle nicht existieren.

§ 29. Wir wollen nun sehen, wie es mit der regulären Convergenz einer Reihe an einer einzelnen Stelle ist, wenn wir die erste Bedingung in § 27 auslassen, d. h. wenn wir voraussetzen, dass der Limes $\underset{n=\infty}{L} S_n(x)$ existiert und gleich $f(x)$ ist für jedes x innerhalb eines gegebenen Intervalls, aber dass $S_n(x)$ nicht eine stetige Function von x ist. Dann können wir den folgenden Satz beweisen, nämlich:

Wenn $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x) + \cdots + u_n(x)$ ist, wo $u_k(x)$ nicht eine stetige Function von x ist, aber wo der Limes $\underset{n=\infty}{L} S_n(x)$ für jeden constanten Wert von x innerhalb eines gegebenen Intervalls existiert und gleich $f(x)$ ist, dann kann $S_n(x)$ an einer einzelnen Stelle gegen $f(x)$ regulär convergieren.

Wir wollen diesen Satz auch beweisen, indem wir das folgende Beispiel betrachten, wo die Behauptung erfüllt ist.

Beispiel. Es sei

$$S_n(x) = \underset{t=0}{L} \frac{x \sin^2 n! \pi x}{\sin^2 n! \pi x + t^2} \qquad 0 \leqq x \leqq 1.$$

Für alle rationalen Werte von x haben wir

$$\underset{n=\infty}{L} S_n(x) = 0.$$

Denn wenn wir $x = p/q$ setzen, wo p und q ganze, endliche und zu einander prime Zahlen sind, haben wir immer, wenn n über alle Grenzen wächst, schliesslich $n \geqq q$ und dann ist $n! \pi x$ ein ganzzahliges Vielfaches von π, und deshalb ist

gleichzeitig $\sin^2 n!\,\pi x$ gleich Null. Daraus folgt, dass für rationale Werte von x

$$f(x) = \underset{n=\infty}{L} S_n(x) = \underset{n=\infty}{L} \left\{ \underset{t=0}{L} 0 \right\} = 0.$$

Dagegen ist für irrationale Werte von x für keinen noch so grossen Wert von n, $n!\,\pi x$ ein ganzzahliges Vielfaches von π und also ist immer für einen solchen Wert von x

$$0 < \sin^2 n!\,\pi x < 1.$$

Daraus folgt dann an einer solchen Stelle

$$f(x) = \underset{n=\infty}{L} S_n(x) = \underset{n=\infty}{L} \left\{ \underset{x=0}{L} \frac{x}{1 + \frac{t^2}{\sin n!\,\pi x}} \right\} = x.$$

Der Limes existiert also für alle in Betracht kommenden Werte von x, und $f(x)$ ist für alle rationalen Werte von x gleich Null und für alle irrationalen Werte von x gleich x. Die Reihe stellt dann nur an der Stelle $x = 0$ eine stetige Function dar. Sie convergiert an der Stelle ($x = 0$, $n = \infty$) aber regulär, denn

$$\underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} S_n(x) = \underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} \left\{ \underset{t=0}{L} \frac{x \sin^2 n!\,\pi x}{\sin^2 n!\,\pi x + t^2} \right\} =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} 0 \text{ für rationales } x \\ \underset{\substack{n=\infty \\ x=0}}{L} x \text{ für irrationales } x \end{array} \right\} = 0 = f(0).$$

Sie kann auch an keiner anderen Stelle regulär convergieren, weil an jeder anderen Stelle $f(x)$ unstetig ist. Damit ist unsere Behauptung vollständig bewiesen.

Wenn wir nun die Resultate von den Betrachtungen in §§ 24, 28, 29 zusammenfassen, können wir sie folgendermassen ausdrücken:

Wenn $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_k(x) + \cdots + u_n(x)$ ist, wo $u_k(x)$ stetig in x, und $\underset{n=\infty}{L} S_n(x) = f(x)$ für

jedes constante x innerhalb des in Betracht kommenden Intervalls ist, dann muss die Reihe an wenigstens einer überall dichten Menge von Stellen regulär convergieren. Wenn aber der Limes $L\limits_{n=\infty} S_n(x)$ nur für einen einzelnen Wert von x existiert, und an allen anderen Stellen die Reihe divergiert, dann kann $S_n(x)$ an dieser einzelnen Stelle regulär convergieren; oder wenn wir voraussetzen, dass $S_n(x)$ unstetig ist, dann kann $S_n(x)$ auch an einer einzelnen Stelle regulär convergieren.

Vita.

Ich, Edgar Jerome Townsend, bin am 22. Februar 1866 als Sohn von Warren Townsend und seiner Ehefrau, Henriette geborene Crocker zu Litchfield, Michigan, America, geboren. Ich besuchte die Hochschule meiner Heimathsstadt und war darnach im Albion College zu Albion, Michigan, matrikuliert, wo ich im Jahre 1890 den Grad Ph. B. bekommen habe. In den Jahren 1890—1891 studierte ich an der Universität Michigan, Annotober, Michigan. Hier ward mir am 25. Juni 1891 auf Grund einer Schlussprüfung und einer Dissertation der Grad Ph. M. zuerkannt. Während der Sommer 1894 und 1895 studierte ich an der Universität Chicago. Seit October 1898 setze ich meine Studien an der Universität Georgia-Augusta zu Göttingen fort.

In den Jahren 1887—1890 war ich „County Examiner of Schools" zu Hillsdale County, Michigan. Nach dem Schluss meiner Studienzeit an der Universität Michigan war ich zwei Jahre (1891—1893) Dozent der Mathematik an einer Technischen Hochschule (Chicago, Manual Training School) in Chicago. Darnach, im Jahre 1893, ward ich als „Assistand Professor" der Mathematik an die Universität Illinois gerufen, wo ich seit 1895 als „Associale-Professor" der Mathematik angestellt bin.

Während meiner Studienzeit habe ich auf der Universität Michigan die Professoren Bemann, Cole und Markley, auf der Universität Chicago die Professoren Maschke und Moore, und in Göttingen die Professoren Hilbert,

Klein, Schur und Voigt gehört. Allen den genannten Herren fühle ich mich zu dauerndem Danke verpflichtet. Insbesondere gilt mein Dank Herrn Professor Hilbert für sein Interesse und seine Beratung während meiner Göttinger Studienzeit.